# Решение геометрических задач с использованием дополнительного построения – удвоение медианы

Лыхина Ксения Александровна

Лесосибирский педагогический институт – филиал Сибирского федерального университета

При доказательстве теорем элементарной геометрии и решении задач часто используются дополнительные построения. Они являются достаточно мощным методом решения как стандартных, так и олимпиадных задач. Суть метода дополнительных построений заключается в том, что чертеж к задаче, на котором трудно заметить связи между данными и искомыми величинами, дополняется новыми элементами, после чего эти связи становятся более ощутимыми или даже очевидными.

В рамках нашей статьи мы рассмотрим один из видов стандартного дополнительного построения – удвоение медианы, который довольно часто фигурирует при решении геометрических задач. Если в условии задачи дана медиана треугольника, то продолжение медианы на такое же расстояние приводит к построению параллелограмма, стороны и одна диагональ которого равны сторонам треугольника, а вторая диагональ равна удвоенной медиане (рис.1). Это дает возможность использовать свойства параллелограмма [5]. Вместе с тем получается треугольник, определенный по трем сторонам.

Рассмотрим примеры решения задач.

***Задача 1.*** Дан треугольник $ABC$, в котором сторона $AB$ равна 10, сторона $AC = 16$, а медиана $AM = 5$. Найти площадь треугольника $ABC$ [2].

***Решение***

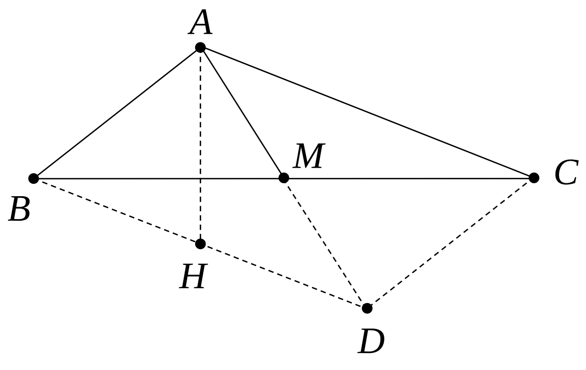



***Рис.* 1**

На продолжении $AM$ за точку $M$ отложим отрезок $MD$, равный $AM$ (рис.1). В параллелограмме $BACD$ известны стороны $AB = CD = 10$, $AC = BD = 16$.
В равнобедренном треугольнике $BAD$ известны три стороны: 10, 10 и 16. Проведем высоту $AH$. По теореме Пифагора $AH = 6$.

$$S_{\Delta BAD} = \frac{1}{2} \cdot BD \cdot AH = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 6 = 48.$$

$$S_{ABCD} - 2 \cdot S_{\Delta ABD} - 2 \cdot S_{\Delta ABC}.$$

Следовательно,

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} = 48.$$

***Задача 2.*** Медиана $AM$ треугольника $ABC$ равна $m$ и образует со сторонами $AB$ и $AC$ углы $\alpha$ и $\beta$ соответственно. Найти эти стороны [2].

***Решение***

На продолжении $AM$ за точку $M$ отложим отрезок $MD$, равный $AM$ (рис.1). Тогда четырёхугольник $ABDC$ – параллелограмм, поэтому $\angle AKC = \angle BAM = \alpha$. Рассмотрим треугольник $ACD$.

По теореме синусов

$$\frac{CD}{\sin\beta} = \frac{AD}{\sin(180^\circ - \alpha - \beta)},$$

откуда

$$AB = CD = \frac{AD\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2m\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

Аналогично

$$AC = \frac{AD\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} = \frac{2m\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

***Задача* 3.** Стороны треугольника равны $AC = 11, CB = 13$ и $AB = 12$. Найти медиану, проведённую к большей стороне [2].

***Решение***

Достроим треугольник $ABC$ до параллелограмма $ABDC$ (рис.1). По теореме о сумме квадратов диагоналей параллелограмма

$$AD^2 + BC^2 = 2AB^2 + 2AC^2,$$

откуда

$$AD^2 = 2AB^2 + 2AC^2 - BC^2 = 288 + 242 - 169 = 361 = 19^2.$$

Следовательно,

$$AM = \frac{1}{2}AD = \frac{19}{2}.$$

***Задача* 4**. Даны два треугольника, причём сторонами второго из них являются медианы первого. Доказать, что отношение площади первого треугольника к площади второго есть $\frac{4}{3}$ [1].

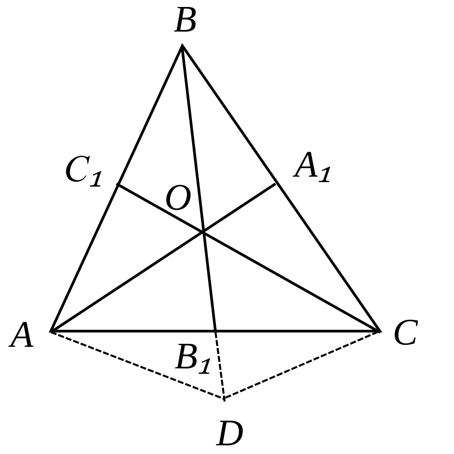


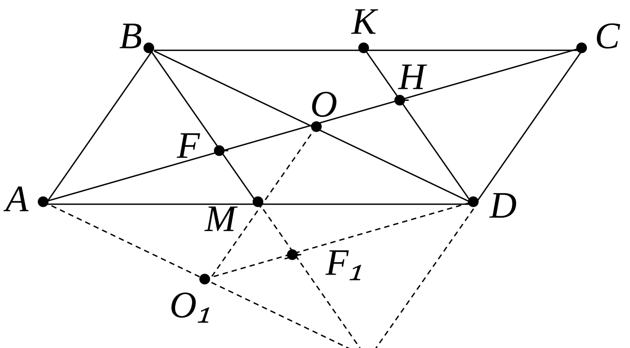

***Рис.* 2**

### *Решение*

Пусть в треугольнике $ABC$ отрезки $AA_1 = m_a, BB_1 = m_b, CC_1 = m_c -$это медианы, а $O$ - точка их пересечения, $S_1$ и $S_2 -$площади первого и второго треугольников соответственно. «Удвоим» медиану $BB_1$ треугольника $AOC$. Каждая из диагоналей параллелограмма $AOCD$ делит его на два равновеликих треугольника, т.е. $S_{\Delta OCD} = S_{\Delta AOC}$. Но $S_{\Delta AOC} = \frac{1}{3}S_1$ и, значит $S_{\Delta OCD} = \frac{1}{3}S_1$. Далее, поскольку $OC = \frac{2}{3}m_c, OD = \frac{2}{3}m_d$ , $DC = AO = \frac{2}{3}m_a$, то треугольник $OCD$ подобен треугольнику со сторонами $m_a, m_b$ и $m_c$ с коэффициентом подобия $k = \frac{2}{3}$. Но в таком случае $S_{\Delta OCD} = \frac{4}{9}S_2 = \frac{1}{3}S_1$, откуда и следует, что $\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{3}$.

При решении данных задач способ применения рассматриваемого дополнительного построения стандартен. Сложнее, когда при решении задачи возникает необходимость в проведении не одной вспомогательной линии, а нескольких.

**Задача 5.** Доказать, что медианы точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершины [4].



### *Решение*

Построим треугольник *ABD* и две его медианы *BM* и *AO*. На продолжении медианы *AO* за точку *O* отложим отрезок *OC*, равный *AO*. В треугольнике *BDC* проведем медиану *DK*. Получим параллелограмм *ABCD* и в нём отрезки *BM* и *KD*, которые параллельны. По теореме Фалеса $AF = FH$ и $CH = HF$, т. е. $AF = FH = HC$. Так как *FH* делится в точке *O* пополам, то доказано, что медиана *BM* отсекает от медианы *AO* одну треть, считая от стороны *BD*.

Доказательство того, что и *AO* отсекает от *BM* одну треть, если считать от стороны *AD*, проводится аналогично: на продолжении медианы *BM* за точку *M* откладывается отрезок $MB_1$, равный *BM*, и проводится медиана $DO_1$ треугольника $ADB_1$. Можно повторить рассуждения и для медианы к стороне *AB* и теорема доказана.

В рассмотренном примере был дважды использован один вид дополнительного построения – удвоение медианы. Чаще при решении одной задачи последовательно используются различные виды дополнительных построений.

***Задача* 6**. На медиане *AM* треугольника *ABC* взята точка *K* так, что $\angle BKM = \angle ABC$. Доказать, что $\angle CKD = \angle ACB$ [5].

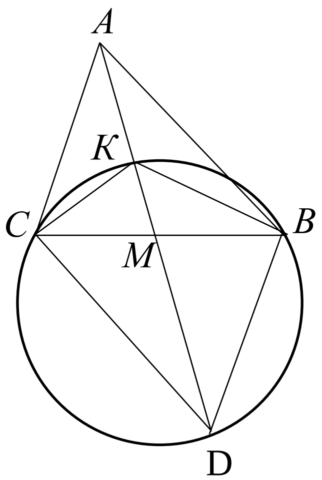



***Рис.* 4**

### *Решение*

«Удвоим» медиану *AM* (рис. 4). *ABDC* – параллелограмм, следовательно, $\angle ABC = \angle DCB$. По условию $\angle ABC = \angle KBC$, следовательно, $\angle BKD = \angle BCD$.
Таким образом, точки *C, K, B, D* принадлежат одной окружности.

Опишем около четырёхугольника *CKBD* окружность. Тогда $\angle CKD = \angle CBD$ (как опирающиеся на общую дугу *CD*), $\angle CBD = \angle ACB$.
Откуда

$$\angle\ CKD = \angle ACB.$$

***Задача* 7**. В трапеции *ABCD* диагонали *AC* и *BD* равны 3 и 5 соответственно, а отрезок MN, соединяющий середины оснований, равен 2. Найти S трапеции.

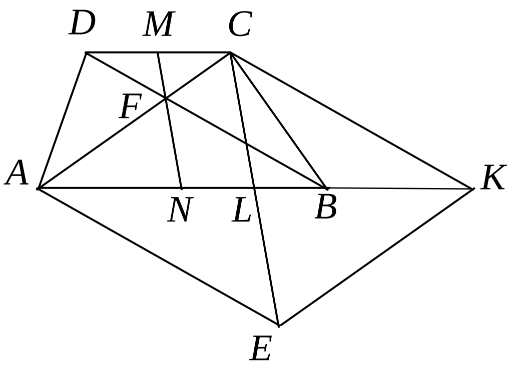



***Рис.* 5**

### *Решение*

Проведём прямые *CK* параллельно *BD* и *CL* параллельно *MN* (рис.1).
Тогда в треугольнике *ACK*: *AC* = 3, *CK* = *BD* = 5 (из параллелограмма *DBKC*), *CL* = 2.

«Удвоим» медиану *CL*. *CK* = 5, *KE* = *AC* = 3,*CE* = 2*CL* = 4. Таким образом, треугольник *CKE* является прямоугольным.

$$S_{\Delta CKE} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4 = 6\,;\ S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB+DC)\cdot h\,;\ S_{\Delta ACK} = \frac{1}{2}(AB+BK)\cdot h\,.$$

Задачи, решаемые с помощью дополнительных построений, традиционно считаются задачами повышенного уровня сложности. Для их решения требуются изобретательность и геометрическая интуиция. Стандартные приемы таких построений рассматриваются чаще всего на конкретных примерах и запоминаются, а нестандартные – приобретаются с опытом [2].

### Список литературы


1. Амелькин В.В. Геометрия на плоскости: Теория, задачи, решения: Учеб. пособие по математике – Мн.: ООО «Асар», 2003. – 592 с.
2. Гордин Р.К. ЕГЭ 2012. Математика. Решение задачи С4. – М.: МЦНМО, 2012. – 328 с.
3. Полонский В.Б. и др. Учимся решать задачи по геометрии. \ В.Б. Полонский, Е.М. Рябинович, М.С. Якир. – Киев.,1996. – 253 с.

4. Сенников Г. П. Наглядно-конструктивное изучение школьной планиметрии: Волго-Вятское книжное издательство. Горький, 1970. – 276 с.

5. Шарыгин И.Ф. Факультативный курс по математике: Решение задач: Учеб. пособие для 10 кл. сред. шк. – М.: Просвещение, 1989. – 252с.