Ряд Тейлора как частный случай рядов Ли

Шимохин Владислав Георгиевич

Соавторы: Решетников Валерий Николаевич, Дробот Василий Александрович

Студенты 3 курса, кафедра ИБСиТ (филиал) СКФУ, г. Пятигорск

Научный руководитель: Игумнов Василько Петрович, канд. педагогических наук, доцент ИБСиТ ИСТиД (филиал) СКФУ, г. Пятигорск

Аннотация: Рассматривается ряд Тейлора, как частный случай ряда Ли. Формулируется фундаментальный результат полученный немецким математиком Вольфгангом Грёбнером, который теоремой обращения.

Ключевые слова: ряд Тейлора, ряд Ли.

Рассмотрим функцию $f(x)$, представляющую собой многочлен n-ой степени.

$$f(x)=a_0 + a_1x + a_2x^2 +\ldots+ a_kx^k +\ldots+ a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n. \quad (1)$$

Пусть требуется разложить этот многочлен по степеням разности (x-a) и пусть имеет место тождество:

$$A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 +\ldots+ A_k(x-a)^k +\ldots+ A_{n-1}(x-a)^{n-1} + A_n(x-a)^n =$$

$$= a_0 + a_1x + a_2x^2 +\ldots+ a_kx^k +\ldots+ a_{n-1}x^{n-1} +a_nx^n, \quad (2)$$

Где $x\in(-\infty;\infty)$, а A_k, $k=0,1,2,\ldots,n$ – неизвестные постоянные коэффициенты. Тогдаполагая в тождестве (2) $x=a$, получим:

$$A_0=f(a).$$

Продифференцируем обе части тождества (2):

$$A_1 + 2A_2(x-a) +\ldots+ k\cdot A_k(x-a)^{k-1} +\ldots+ (n-1)A_{n-1}(x-a)^{n-2} +n\cdot A_n(x-a)^{n-1} =$$

$$= a_1 + 2a_2x +\ldots+ k\cdot a_kx^{k-1} +\ldots+ (n-1)a_{n-1}x^{n-2} +n\cdot a_nx^{n-1}. \quad (3)$$

Полагая в тождестве (3) $x=a$, получим:

$$A_1 = \frac{f'(a)}{1!}$$

Продифференцировав тождество (3) и затем полагая в полученном тождестве x=a, найдем:

$$A_2 = \frac{f''(a)}{2!}$$

Продолжая далее процесс дифференцирования, продифференцируем тождество (2) k раз иполагая в тождестве, полученном в результате дифференцирования x=a, найдем:

$$A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \mathrm{k} = 0,1,2,\dots,\mathrm{n}. \quad (4)$$

Рассматриваемый многочлен n-ой степени, определенный согласно (1), мы разложим по степеням разности $x - \alpha$. Это разложение называется разложением Тейлора. Разлагая функцию f(x) в ряд Тейлора, мы показали что многочлены в ряд Тейлора разлагаются точно. Рассмотренный многочлен n-ой степени, представляющий собою сумму n+1 слагаемых, разлагается в ряд Тейлора , который обрывается на (n+2)-м члене. Все члены этого ряда, начиная с (n+2)-го – нули. Если функция f(x) отлична от многочлена и в точке «α» имеет производные n-го порядка, где n∈N, то она в окрестности точки «α»разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad (5)$$

Если α =0, то ряд (5) записывается так:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (6)$$

Ряд (6) называется рядом Маклорена. Например, разложение функции f(x)=e^x в ряд Маклорена записывается так:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n \quad (7)$$

Ряды (5), (6), (7) представляют собою степенные ряды. Далее мы будем рассматривать операторные ряды. Наш современник, не так давно ушедший из этого мира, немецкий математик Вольфганг Грёбнер разработал теорию рядов Ли, введенных в рассмотрение в позапрошлом веке норвежским математиком Софусом Ли. Следуя Грёбнеру, введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор:

$$D = \sum_{i=1}^{n} \theta_i(z_1, z_2, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

где θ_i голоморфные функции комплексных переменных $z_1, z_2, \dots, z_n$ в окрестности точки $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$. Пусть $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ произвольная функция голоморфная в окрестности рассматриваемой точки, тогда операторный ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} D^\nu f(z_1, z_2, \dots, z_n) \quad (8)$$

называется рядом Ли. Здесьt- новая комплексная переменная, не зависящая от переменных $z_1, z_2, \dots, z_n$,

$$D^\nu f = D(D^{\nu-1} f), \nu = 1,2, \dots$$

Ряд Ли (8) может быть записан в виде:

$$e^{tD} f(z_1, z_2, \dots, z_n).$$

Вольфгангом Грёбнером доказана фундаментальная теорема, названная теоремой обращения.

Теорема обращения.

Если $f(z_1, z_2, \dots, z_n)$ голоморфная в окрестности точки $M(z_1, z_2, \dots, z_n)$ функция, то для достаточно малых t будет иметь место соотношение:

$$e^{tD} f(z_1, z_2, \dots, z_n) = f(e^{tD} z_1, e^{tD} z_2, \dots, e^{tD} z_n) \quad (9)$$

В частности, если

$$D = \frac{d}{dz} \ ,$$

а функция f (z) зависит от одной переменной z и представляет собою голоморфную функцию, то из (9) следует:

$$f(x+t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^\nu}{\nu!} F^{(\nu)}(z) \, ,$$

т.е. ряд Тейлора представляет собою весьма частный случай ряда Ли.

Отметим, что в нашей стране рядами Ли занимался профессор Филатов Александр Николаевич и до появления его монографий по рядам Ли литературы по данной тематике на русском языке не было. Отметим также, что ряды Ли находят разнообразные и многочисленные приложения в алгебраической геометрии, теории дифференциальных уравнений, небесной механике, в некоторых областях теоретической физики и в особенности в физике реакторов.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙСПИСОК

1. Lie S. Theorie der Transformationsqruppen, 1. Absehnitt, B.I.Tuibner. Leipzig 1888.
2. Gröbner W. Die Lie-Reihe und ihreAuwendungen, Berlin 1967.
3. Филатов А.Н. Обобщенные ряды Ли и их приложения. Ташкент 1963.
4. Бондаренко Б.А., Филатов А.Н. квазиполиномиальные функции и их приложения и задачам теоретической упругости. Ташкент 1978.
5. Фихтенгольц Г.М. курс дифференциального и интегрального исчисления, том 1. Физматгиз. М. 1958
6. Игумнов В.П. Представление решений дифференциальных уравнений модифицированными методами Ли.// Дифференциальные уравнения. 1984. Е.20,№6, С, 952-958.