

## **Динамическая модель рекламных расходов с запаздыванием**

Автор: Фадеева Р.А., студент 3 курса, направление «Бизнес-информатика»

Научный руководитель: к.ф - м.н., доцент Лутошкин И.В.

ФГОУ ВПО «Ульяновский государственный университет»

### **Введение**

Любая организация заинтересована в продаже товаров или услуг, на которые она специализирована. Причем, согласно экономической теории, товар должен быть продан по наиболее выгодной для предприятия цене для получения максимальной прибыли. Для достижения основной цели предприятие-продавец должен привлечь внимание потенциальных покупателей к своему продукту, что осуществляется посредством всевозможных видов рекламы. Как известно, задачей рекламы является отражение уникальности качеств товара, а также его ценовой характеристики. Но мало кто задумывается, что, кроме визуальной красоты рекламы, не менее важным является верный расчет эффективной частоты показа рекламы [2]. Необходимо найти наиболее оптимальное сочетание таких показателей, как: темп производства и продаж, количество и цена товара, объем рекламы, а также затраты на нее [6]. Главной проблемой выявления влияния рекламы на продажи предприятия является наличие переменных, единицу измерения которых невозможно определить, а также коэффициенты, подсчет которых вызывает затруднение, такие как показатель бренда, то есть популярность данного производителя среди населения, или эффективность рекламы.

В рыночной экономике любое предприятие заинтересовано привлечь наибольшее количество покупателей, для чего необходимо сделать оптимальный подсчет всех факторов, влияющих на продажи, вплоть до периода влияния каждого вида рекламы [3]. В эпоху развития высоких технологий появляются новые возможности рекламирования товаров и услуг.

Поэтому данная тема является важным и трудным для расчета вопросом любой организации. Пока нет единого решения данной проблемы, в результате чего эта тема является актуальной, и заставляет задумываться большое количество исследователей.

В данной работе было рассмотрено влияние рекламы с учетом запаздывания [4], [5], [7], то есть случай влияния на эффект от рекламы разных факторов за предыдущие периоды, в частности затрат на рекламу.

Целью данной работы является, в первую очередь, определение оптимальных вложений в рекламу и их влияния на доход предприятия.

Исследование было проведено на основе статьи [1] с добавлением учета влияния рекламы за предыдущие периоды. В ходе работы были использованы количественные методы определения взаимосвязи между величинами корреляционный и регрессионный анализ.

## 1. Постановка задачи

Пусть  $z(t)$  – количество товара на складе производителя. Изменение этой величины можно описать уравнением

$$\dot{z} = u - P, z(0) = 0, \quad (1.1)$$

где  $u(t)$  – темп производства;  $P(t)$  – темп продажи, т.е.  $u(t)\Delta t$  – количество товара, произведенного за время  $\Delta t$ ;  $P(t)\Delta t$  – количество товара, проданного за это же время. Все величины в данном исследовании являются неотрицательными, так как имеют стоимостное выражение. Для простоты изложения рассматривается задача с товаром неограниченного спроса. В этом случае функция  $P(t)$  не зависит от количества товара у покупателя и ее можно выбрать в виде  $P(t) = z(t)N(c(t), w(t))$ , где  $N(c, w)$  – покупательная способность потребителя, зависящая от цены товара  $c(t)$  и объема рекламы  $w(t)$ . Более конкретно эту функцию можно выбрать в виде  $N(c, w) = f(w)\exp\{-c\}$ , где  $f(w)$  – некоторая монотонно возрастающая функция, характеризующая зависимость покупательной способности от

количества рекламы. Можно рассмотреть разные варианты задания функции  $f(w)$ . Рассматривается простейший случай, когда функция линейная, т.е.

$$P(t) = bw(t)z(t)\exp\{-c(t)\}, \quad (1.2)$$

где  $b$  – некоторый коэффициент, который можно трактовать как потенциальная привлекательность товара. В такой постановке задачи нужно еще уточнить зависимость объема рекламы  $w(t)$  от затрат на нее  $v(t)$ . Так как необходимо построить модель рекламы с запаздыванием, то представим  $v(t)$  как функцию с запаздывающим аргументом  $v(t - \tau)$ . Суть запаздывающего аргумента состоит в том, что текущее действие рекламы на покупателя отражается как результат вложений в нее в совокупности текущего и предыдущих периодов.

В данной работе рассмотрен случай динамической рекламы, когда зависимость между  $w(t)$  и  $v(t - \tau)$  задается уравнением

$$\dot{w} = -kw(t) + \sum_{i=0}^{\tau} \alpha_i v(t - i), w(0) = 0, \quad (1.3)$$

где  $k$  – коэффициент, характеризующий потери рекламы ( $k \geq 0$ ). Примером статической рекламы могут служить установленные рекламные щиты, примером динамической рекламы – реклама в СМИ, когда потребители, увидев рекламу, о ней через какое-то время забывают. Модель (1.2) предполагает, что в отсутствие рекламы товар не продается. Вариант, когда в отсутствие рекламы товар все-таки продается, можно учесть, заменив в (1.2)  $w(t)$  на  $1 + w(t)$ . Однако, как видно из (1.3), такую замену делать необязательно. Достаточно в (1.3) взять начальное условие  $w(0) = 1$ . Однако такое дополнение не играет существенной роли в полученном ниже решении задачи.

Пусть весь процесс продолжается в течение некоторого конечного интервала времени  $[0, T]$ . Общий доход производителя товара равен

$$J = \int_0^T [c(t)P(t) - u(t) - v(t)]dt. \quad (1.4)$$

Для уточнения отметим, что  $v(t) - \text{темп затрат на рекламу, т.е. } v(t)\Delta t - \text{количество средств, затраченных на рекламу за время } \Delta t$ . Очевидно, что все

рассматриваемые параметры и переменные не могут быть отрицательными. Будем также предполагать, что должны выполняться условия

$$0 \leq u(t) \leq u_0, 0 \leq v(t) \leq v_0, \quad (1.5)$$

где  $u_0$  – максимально возможный темп производства,  $v_0$  – максимально возможный темп затрат на рекламу. В результате получается стандартная задача из теории оптимального управления: найти такие функции  $c(t)$ ,  $u(t)$  и  $v(t)$  на интервале времени  $[0, T]$ , удовлетворяющие условиям (1.4), при которых функционал (1.3) максимален.

## 2. Принцип максимума с запаздывающим аргументом

Введем вспомогательные переменные  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$  и на основании уравнений (1.1), (1.3) и функционала (1.4) составим функцию Гамильтона:

$$\begin{aligned} H(z, w, \psi_1, \psi_2, u, c, v) = & \psi_1(u - P) + \psi_2(-kw + \sum_{i=0}^{\tau} \alpha_i v(t - i)) - cP + u + \\ & v = u(\psi_1 + 1) + v(t)(\psi_2 \alpha_0 + 1) + \psi_2 \sum_{i=1}^{\tau} \alpha_i v(t - i) - \psi_2 kw - (c + \psi_1)P. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Минимум функции  $H$  по  $u$  с учетом (1.5) достигается при

$$u^*(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_1(t) > -1, \\ u_0, & \text{если } \psi_1(t) < -1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Минимум функции  $H$  по  $v$  с учетом (1.5) достигается при

$$\begin{aligned} v(t) = & \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_2 > -1, \\ v_0, & \text{если } \psi_2 < -1. \end{cases} \\ v^*(t - i) = & \begin{cases} 0, & \text{если } \psi_2 > -\frac{1}{\alpha_i}, 1 \leq i \leq \tau, \\ v(t), & \text{если } \psi_2 < -\frac{1}{\alpha_i}, 1 \leq i \leq \tau. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Минимум функции  $H$  по  $c(t)$  с учетом (1.2) достигается при

$$c^*(t) = 1 - \psi_1(t). \quad (2.4)$$

После подстановки (2.2) – (2.4) в (2.1) получаем гамильтониан

$$H^*(z, \psi_1) = u^*(\psi_1 + 1) + v^*(\psi_2 + 1) - kw - P^*, \quad (2.5)$$

где

$$P^*(t) = b_0 z(t) w(t) \exp\{\psi_1(t)\}, b_0 = b/e. \quad (2.6)$$

Переменная  $\psi_1(t)$  должна удовлетворять уравнению

$$\dot{\psi}_1 = -\frac{\partial H^*}{\partial z} = b_0 w e^p, \psi_1(T) = 0, \quad (2.7)$$

а переменная  $\psi_2(t)$  – уравнению

$$\dot{\psi}_2 = -\frac{\partial H^*}{\partial w} = kw + b_0 z e^p, \psi_2(t) = 0, \quad (2.8)$$

Как следует из общей теории, необходимым условием существования решения задачи оптимального управления является существование ненулевых функций  $\psi_1(t)$  и  $\psi_2(t)$ , удовлетворяющих уравнениям (2.7) и (2.8). Поэтому основная проблема – нахождение начальных значений  $\psi_1(0)$  и  $\psi_2(0)$ , для которых существует решение краевой задачи.

### 3. Корреляционно-регрессионный анализ

Для определения параметров модели (1.1)-(1.4) воспользуемся статистическими данными АвтоВАЗа по полугодиям за 2003-2015 г. За 2005-2008 гг. имелись только годовые данные, поэтому была рассчитана средняя разница между первыми и вторыми полугодиями сведений за 2003, 2004, 2009-2015 гг., и были подсчитаны примерные показатели по полугодиям недостающих данных. Выборка составляет 26 наблюдений (Приложение 1).

Необходимо провести анализ и дать оценки параметрам заданной ранее модели  $\dot{w} = -kw(t) + \sum_{i=0}^t \alpha_i v(t-i)$ . В качестве накопительного эффекта рекламы  $w(t)$  были использованы данные по выручке, параметру  $v(t)$  соответствуют данные по затратам на рекламу компании.  $\dot{w}$  показывает изменение выручки за полугодие:

$$\dot{w} = w_t - w_{t-1}.$$

В качестве эксперимента были использованы данные затрат на рекламу за 5 периодов.

Исходное уравнение:

$$\dot{w} = -kw_t + \alpha_0 v_t + \alpha_1 v_{t-1} + \alpha_0 v_{t-2} + \alpha_0 v_{t-3} + \alpha_0 v_{t-4}.$$

Была построена корреляционная матрица для отражения связи между параметрами модели. Цветом выделены наиболее значимые по отношению друг к другу параметры.

Таблица 1. Корреляционная матрица.

	$DW(t)$	$W(t)$	$V(t)$	$V(t-1)$	$V(t-2)$	$V(t-3)$	$V(t-4)$
DW(t)	1						
W(t)	0,488954	1					
V(t)	0,506108	0,570658	1				
V(t-1)	-0,53927	0,094941	-0,44589	1			
V(t-2)	0,08556	0,181444	0,633227	-0,38645	1		
V(t-3)	-0,49072	-0,28548	-0,36694	0,540332	-0,28202	1	
V(t-4)	0,158003	-0,11901	0,299721	-0,37111	0,554797	-0,20875	1

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы:

1. Изменение выручки несильно напрямую зависит от затрат на рекламу за текущий период и обратно зависит от затрат на рекламу в предыдущем полугодии. То есть с увеличением затрат на рекламу в текущем полугодии увеличивается и выручка, но при этом с увеличением затрат на рекламу в предыдущем периоде выручка снижается, при чем связь между изменением выручки и затратами за предыдущее полугодие выше, чем за текущий период. Эта закономерность дает нам возможность выдвинуть гипотезу о том, что вложения в рекламу данной компании являются лишними затратами.

2. Прослеживается связь между текущей выручкой и текущими затратами на рекламу, что является закономерным в соответствии с 1 пунктом.

3. Зависимость изменения выручки от выручки текущего периода незначительная, но близка к зависимости от затрат на рекламу в текущем периоде.

4. Затраты на рекламу в текущем периоде зависят от затрат на 2 полугодия ранее.

Следующим шагом является построение регрессионной модели изменения выручки на основании тех же параметров, представленных в корреляционной матрице. В результате оценки незначимыми оказались переменные  $V(t)$ ,  $V(t-3)$ ,  $V(t-4)$ , что частично соответствует показателям корреляционной матрицы. В результате проведенной регрессии уравнение приняло следующий вид:

$$\dot{w} = 0.37w_t - 32.6v_{t-1} - 28.3v_{t-2}.$$

В соответствии с регрессионной моделью переменная затрат на текущий период является незначимой, а оценка вложений в рекламу за предыдущее полугодие и двумя полугодиями ранее является отрицательной, то есть прослеживается обратная зависимость. Таким образом, в соответствии с данными оценками расходы на рекламу являются лишними убытками предприятия, не приносящей никакой выгоды.

Оценка переменной выручки текущего периода достаточно мала, что подтверждает результат корреляционной матрицы несильной зависимости изменения выручки от выручки текущего периода. Единственной существенной разницей между корреляционной матрицей и регрессионной моделью является значимость переменной затрат на рекламу на 2 полугодия ранее.

Так как найдены несоответствия в результатах, и невозможно однозначно сделать вывод о достоверности полученных оценок, а также полученная модель получилась убыточной, что маловероятно, анализ был продолжен. Было сделано следующее преобразование:

$$\dot{w} + kw_t = \alpha_0v_t + \alpha_1v_{t-1} + \alpha_0v_{t-2} + \alpha_0v_{t-3} + \alpha_0v_{t-4}.$$

Предположим,  $k=0.05$ :

$$\dot{w} + 0,05w_t = \alpha_0v_t + \alpha_1v_{t-1} + \alpha_0v_{t-2} + \alpha_0v_{t-3} + \alpha_0v_{t-4}.$$

Также к этому уравнению были построены корреляционная матрица и регрессионная модель.

Таблица 2. Корреляционная матрица.

	$DW(t)+kW(t)$	$V(t)$	$V(t-1)$	$V(t-2)$	$V(t-3)$	$V(t-4)$
$DW(t)+kW(t)$	1					
$V(t)$	0,521736	1				
$V(t-1)$	-0,52088	-0,44589	1			
$V(t-2)$	0,092437	0,633227	-0,38645	1		
$V(t-3)$	-0,49253	-0,36694	0,540332	-0,28202	1	
$V(t-4)$	0,148073	0,299721	-0,37111	0,554797	-0,20875	1

На основе полученных результатов можно сделать следующий вывод: данная корреляционная матрица практически идентична предыдущей. Так как две переменные были преобразованы в одну общую, появились новые показатели зависимостей  $\dot{w} + kw_t$  от  $v_t$  и  $v_{t-1}$ , они близки к показателям зависимостей  $\dot{w}$  от  $v_t$  и  $v_{t-1}$ , что является закономерным.

Значительные изменения произошли в регрессионной модели уравнения - значимой является только переменная  $v_t$ :

$$\dot{w} + 0,05w_t = 38,3v_t.$$

Так же, как в предыдущем случае, найдены несоответствия в результатах корреляционной матрицы и регрессионной модели, нельзя сделать вывод о достоверности полученных оценок, но в данном случае модель не является убыточной, и поэтому можно сделать предположение о том, что она близка к подлинной.

Так как предыдущие оценки не являются достоверными, было введено следующее уравнение для построения регрессионной модели:

$$w_t = kw_{t-1} + \alpha_0 v_t + \alpha_1 v_{t-1} + \alpha_2 v_{t-2} + \alpha_3 v_{t-3} + \alpha_4 v_{t-4}.$$

В результате построенной регрессионной модели были получены следующие оценки:

$$w_t = 0,88w_{t-1} + 39,7v_t$$

Переменные  $v_{t-1}, v_{t-2}, v_{t-3}, v_{t-4}$  оказались незначимыми. Были сделаны следующие преобразования:

$$w_t - w_{t-1} = 0,88w_{t-1} - w_{t-1} + 39,7v_t;$$



$$w_t - w_{t-1} = -0,12w_{t-1} + 39,7v_t;$$

$$w_t - w_{t-1} = \dot{w};$$

$$\dot{w} = -0,12w_{t-1} + 39,7v_t.$$

Полученную модель можно трактовать следующим образом: при увеличении затрат на рекламу на 1000 рублей выручка предприятия увеличивается на 39,7 тыс. рублей.

Полученная модель может быть использована для дальнейшего анализа с целью определения оптимальной стратегии затрат на рекламу.

## **Заключение**

В процессе исследования было выдвинуто предположение о том, что на изменение эффекта от рекламы влияют вложения в нее в разные периоды времени. Данное исследование, проведенное на основе статистических данных компании N по выручке и затратам на рекламу, показало немного другую картину: на изменение выручки влияют только текущие затраты на рекламу и выручка за прошлый период. Согласно рассчитанной модели можно сделать вывод, что реклама имеет значительное влияние на продажи компании N. Компания N не является популярной автомобильной маркой, он пользуется спросом преимущественно из-за российского производства. Покупатель в большинстве случаев отдает предпочтение иностранным производителям в силу качества и технических характеристик автомобилей, поэтому для компании N достаточно важной является реклама. Нужно учесть, что в анализе использовались данные за полугодия, что, возможно, сильно искажает результаты исследования. Именно по этой причине изменение выручки зависит от текущего периода времени, то есть от текущих 6 месяцев, а не от предыдущих полугодий, так как это достаточно длинный промежуток времени. Маловероятно, что на покупателя влияет реклама прошлого полугодия.

Таким образом, похожий анализ на основе полученных моделей (1.1)-(1.4) можно применять к любой организации. Чаще всего, чем меньше

период между статистическими данными, тем достоверней будут результаты исследований, но нужно учитывать продукт, по которому проводится анализ, так как для каждого товара существует свой оптимальный период воздействия на потребителя.

### **Список использованной литературы**

1. Параев Ю.И. Оптимальное управление динамической рекламой в задаче производства и сбыта товара // Вестник Томского государственного университета. – 2004. - № 284. С. 73-76
2. Лутошкин И.В. Моделирование отдачи от частоты рекламных воздействий / Прикладная эконометрика. – 2010. - №3 (19). – С. 101-111.
3. Лутошкин И.В., Чекмарева А.Н. Математическое моделирование функций сбыта // Известия высших учебных заведений. Серия: экономика, финансы и управление производством, 2016, № 3 (25), стр. 82-91.
4. Боков Г.В. Принцип максимума Понтрягина в задаче с временным запаздыванием // Фундаментальная и прикладная математика, 2009, том 15, № 5, с. 3—19.
5. Матвеев А.С. Задачи оптимального управления с запаздываниями общего вида и фазовыми ограничениями // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1988, том 52, выпуск 6, страницы 1200–1229
6. Лутошкин И.В., Мартыненко Е. В. Сравнение продаж продукции различных видов в зависимости от рекламных воздействий. // Известия высших учебных заведений. Серия: экономика, финансы и управление производством, 2016, № 01 (27), стр. 113-121.
7. Харатишвилли Г.Л. Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием // Докл. АН СССР. – 1961. - Т. 136 С.39-42

## Статистические данные компании N по полугодиям

Периоды	Выручка W(t) в тыс.руб	Затраты на рекламу V(t) в тыс.руб
1 полугодие 2003	60972	206
2 полугодие 2003	69800	348
1 полугодие 2004	75857	452
2 полугодие 2004	84679	637
1 полугодие 2005	75939	581
2 полугодие 2005	83675	959
1 полугодие 2006	86089	474
2 полугодие 2006	93826	852
1 полугодие 2007	89904	602
2 полугодие 2007	97641	980
1 полугодие 2008	92166	562
2 полугодие 2008	99902	940
1 полугодие 2009	44859	77
2 полугодие 2009	47184	500
1 полугодие 2010	61984	355
2 полугодие 2010	75646	311
1 полугодие 2011	82207	516
2 полугодие 2011	92866	677
1 полугодие 2012	89220	352
2 полугодие 2012	100841	867
1 полугодие 2013	82980	207
2 полугодие 2013	94069	740
1 полугодие 2014	90427	510
2 полугодие 2014	100307	1106
1 полугодие 2015	91872	272
2 полугодие 2015	84610	1160