

**Малышева Ксения Валентиновна,**

студентка

Сургутский государственный педагогический университет

г. Сургут, Россия

**Мугаллимова Светлана Ринатовна**

к.п.н., старший преподаватель

Сургутский государственный педагогический университет

г. Сургут, Россия

## ПРАВИЛЬНЫЕ И ПОЛУПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

Учёных геометров и обычных людей всегда интересовали такие сложные фигуры пространства как многогранники, особенно потому, что они обладают симметрией. Вообще, наш мир полон большим разнообразием красивых и сложных фигур, что имеют форму многогранников. В природе существуют вирусы, кристаллы, одноклеточные вещества (например, радиолярии, что по форме напоминают правильные и звёздчатые многогранники), органические соединения, молекулы и ещё много того, что имеют многогранную форму. В архитектуре, изобразительном искусстве, скульптуре, дизайне, флористике, ювелирном деле, кристаллографии, играх-головоломках («кубик Рубика», «Молдавская пирамидка») можно увидеть такие выпуклые тела, а также просто в обычных вещах в качестве упаковок и предметов для дома.

На сегодняшний день продолжается изучение правильных и полуправильных многогранников. В основном мотивами современных исследований являются красота и симметрия этих тел, но особое внимание им уделяется в кристаллографии. Также в начале нынешнего столетия идёт изучение новых семейств многогранников, использование для тестирования программ с трёхмерной графикой. Современные программы (Mathlab, Stella, Mathematica), приложения (A Plethora of Polyhedra, World of Polyhedra), где есть возможность перемещать многогранники и создавать геометрические композиции, используются в дизайне и при создании виртуальных реальностей, охватывающих разные области (молекулярная химия, видеоигры, спецэффекты для кино) [3].

Многогранники имеют богатую историю, и всё же они включены в современный раздел математики. Теория многогранников имеет большое значение не только для теоретических исследований по геометрии, но и для областей прикладной математики – линейного программирования, теории оптимального управления и др. Наиболее

необычными, интересными, гармоничными и красивейшими формами обладают правильные, полуправильные и звёздчатые многогранники.

Изучением многогранников занимались еще античные ученые. Пифагор Самосский создал космологическое учение, связавшее правильные многогранники с устройством Вселенной. Пифагорейцы считали, что элементы первооснов бытия имеют форму правильных многогранников, а именно: огонь – тетраэдр, земля – гексаэдр, воздух – октаэдр, вода – икосаэдр. Вся Вселенная, по мнению древних, имела форму додекаэдра. Первая теория о пяти правильных телах принадлежит великому греческому математику Теэтету Афинскому. Его основные открытия были изложены в «Началах» Евклида, а именно, в последней XIII книге. Подробно описал свойства правильных многогранников древнегреческий ученый Платон, который рассказал о многогранниках в знаменитом диалоге «Тимей». Именно поэтому правильные многогранники называются также телами Платона. Согласно «Математическому собранию» Паппа Александрийского, Архимед создал трактат о 13 полуправильных (архимедовых) многогранниках.

Иоганн Кеплер в своей работе «Гайна мироздания» в 1596 году, используя правильные многогранники, вывел принцип, которому подчиняются формы и размеры орбит планет Солнечной системы (Космический кубок). Также он первым опубликовал полный список 13 архимедовых тел и дал им названия, которые известны поныне. Бельгийский математик Эжен Шарль Каталан открыл 13 многогранников (Каталановых тел), получаемых на основе 13 архимедовых тел [3].

Четырнадцатый многогранник Архимедовых тел был найден в 1957 году московским математиком В.Г. Ашкинуде, что иногда называют «псевдоархимедовым» телом [6].

Огромный вклад в изучение правильных и полуправильных многогранников и их свойств внёс Е.С. Фёдоров, работы которого считаются основой науки о кристаллах: в 1881 году им были найдены 5 Фёдоровых тел (параллелоэдров).

Познакомившись с историей, перейдём к основной теории о правильных и полуправильных многогранниках. Перед тем, как дать определения понятию «правильный многогранник», важно знать, какой многогранник называют выпуклым:

«Многогранник называется выпуклым, если он лежит с одной стороны от плоскости любой своей грани, т. е. плоскость его любой грани является его опорной плоскостью» [2].


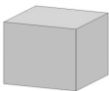


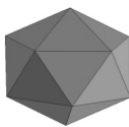
«Выпуклый многогранник называется правильным, если все его грани – равные правильные многоугольники и, кроме того, в каждой его вершине сходится одно и то же число рёбер» [4].

Рассмотрим важную теорему правильных многогранников:

«Теорема. Существует только пять видов правильных многогранников» [1]. В соответствии с теоремой получаем следующие правильные многогранники (Платоновы тела): тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр (табл. 1).

Таблица 1

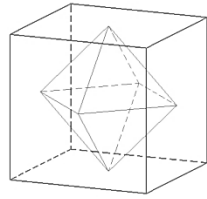
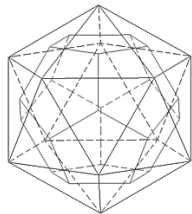
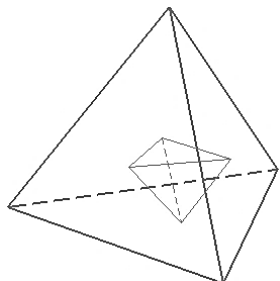
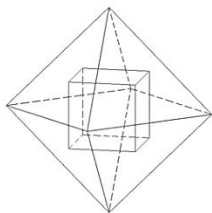
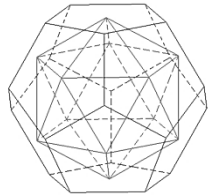
Правильные многогранники

Правильный многогранник	Количество граней	Количество рёбер	Количество вершин	Сумма плоских углов при каждой вершине	Площадь	Объём
Тетраэдр 	4 равносторонних треугольника	6	4	180°	$S = a^2\sqrt{3}$	$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Куб 	6 квадратов	12	8	270°	$S = 6a^2$	$V = a^3$
Октаэдр 	8 равносторонних треугольников	12	6	240°	$S = 2\sqrt{3} a^2$	$V = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$
Додекаэдр 	12 правильных пятиугольников	30	20	324°	$S = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} a^2$	$V = \frac{15 + 7\sqrt{5}}{4} a^3$
Икосаэдр 	20 равносторонних треугольников	30	12	270°	$S = 5\sqrt{3} a^2$	$V = \frac{5(3 + \sqrt{5})}{12} a^3$

Каждый вид правильного многогранника двойственен какому-то другому правильному многограннику.

Два правильных многогранника называются двойственными, если центры граней одного из них являются вершинами другого (табл. 2).

## Двойственность правильных многогранников

Куб и октаэдр	Додекаэдр и икосаэдр	Тетраэдр и тетраэдр
<p>центры граней куба являются вершинами октаэдра</p> 	<p>центры граней икосаэдра являются вершинами додекаэдра</p> 	<p>тетраэдр двойственен сам себе (центры его граней являются вершинами тетраэдра)</p> 
<p>центры граней октаэдра являются вершинами куба</p> 	<p>центры граней додекаэдра являются вершинами икосаэдра</p> 	

Кроме Платоновых тел выделяют и другие группы правильных многогранников.

Тела Кеплера-Пуансо – правильные звёздчатые многогранники, которые получают с помощью продления рёбер или несмежных граней Платоновых тел до пересечения друг с другом: малый звёздчатый додекаэдр, большой звёздчатый додекаэдр, большой додекаэдр, большой икосаэдр (табл. 3) [7].

Существуют также и Фёдоровы тела:

«Фёдорова тела – выпуклые многогранники, параллельными переносами которых можно заполнить пространство так, чтобы они не входили друг в друга и не оставляли пустот между собой (т. е. являются параллелоэдрами) [5].

Немного расскажем и о полуправильных многогранниках.

«Выпуклый многогранник называется полуправильным, если его гранями являются правильные многоугольники, возможно, с разным числом сторон, и все многогранные углы равны, причем один из них в другой можно перевести движением самого многогранника» [7].

Известно две группы полуправильных многогранников.

Существует 13 Архимедовых тел, для которых характерны следующие признаки [8]:

- все грани являются правильными многоугольниками двух или более типов;
- грани не одинаковы;

- тело относится к одному из трёх существующих типов пространственной симметрии (тетраэдрическому, октаэдрическому или икосаэдрическому);
- для любой пары вершин существует симметрия многогранника, переводящая одну вершину в другую;
- все многогранные углы при вершинах конгруэнтны.

Есть также 13 и Каталановых тел, двойственных Архимедовым телам. Основные характеристики этих тел [8]:

- все грани не являются правильными многоугольниками;
- все грани одинаковы;
- тело относится к одному из трёх существующих типов пространственной симметрии (тетраэдрическому, октаэдрическому или икосаэдрическому);
- двугранные углы равны;
- есть правильные многогранные углы.

Главные отличия между этими двумя группами полуправильных многогранников, которые стоит запомнить: у Каталановых тел все грани одинаковы, но не все они являются правильными многоугольниками, в то же время у Архимедовых тел наоборот грани не одинаковы, при этом все грани являются правильными многоугольниками двух или более типов.

Многогранники изучаются школьниками в 10-11 классах. Задания, связанные с правильными и полуправильными многогранниками, вызывают наибольшую трудность у ребят, особенно задачи на построение сечений. А знания об этих пространственных фигурах пригодятся в том числе и на экзамене.

Хочется разобрать задачу на построение сечения куба плоскостью, проходящей через точки  $E, F, G$ , лежащие на рёбрах куба.

«Решение: для построения сечения куба, проходящего через точки  $E, F, G$ , найдём точку  $P$  пересечения прямой  $EF$  и плоскости грани  $ABCD$ . Обозначим  $Q, R$  точки пересечения прямой  $PG$  с  $AB$  и  $CD$  (рис. 1). Проведём прямую  $RF$  и обозначим  $S, T$  её точки пересечения с  $CC_1$  и  $DD_1$ . Проведём прямую  $TE$  и обозначим  $U$  её точку пересечения с  $A_1D_1$ . Соединим точки  $E$  и  $Q, G$  и  $S, U$  и  $F$ . Полученный шестиугольник  $EUFSGO$  будет искомым сечением» [7].

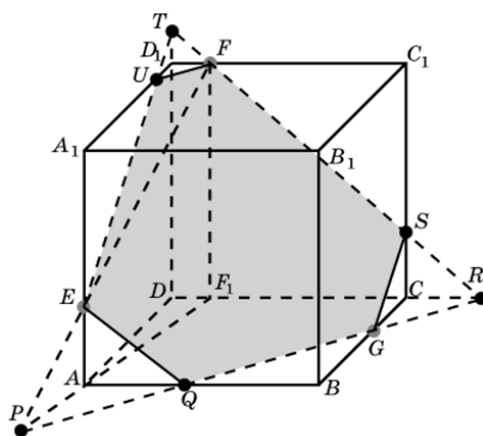


Рис. 1

### Список литературы

1. Адамар, Ж. Элементарная геометрия. – Ч.2.: Стереометрия [Текст]: пособие / Ж. Адамар. – 3-е изд. – М.: Учпедгиз, 1958. – 760 с.
2. Александров, А.Д. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. организаций: базовый и углубл. уровни / А.Д. Александров, А.Л. Вернер, В.И. Рыжик. – М.: Просвещение, 2014. – 255 с.
3. Альсина, К. Тысяча граней геометрической красоты. Многогранники [Текст] / К. Альсина; пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 144 с.
4. Атанасян, Л.С. Геометрия: 10-11 классы [Текст]: учеб. для общеобразоват. учреждений: базовый и профил. уровни / Л.С. Атанасян, В.Ф. Бутузов, С.Б. Кадомцев и др. – 22-е изд. – М.: Просвещение, 2013. – 255 с.
5. Большая энциклопедия Кирилла и Мефодия [Электронный ресурс], 2006. – Режим доступа: <http://megabook.ru>
6. Савченко, В. Полуправильные многогранники [Текст] / В. Савченко // Квант. – 1979. – №1. – С. 3.
7. Смирнова, И.М. Геометрия. 10-11 класс [Текст]: учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений (базовый и профильный уровни) / И.М. Смирнова, В.А. Смирнов. – 5-е изд., испр. и доп. – М.: Мнемозина, 2008. – 288 с.
8. Шишова, А.Б. Полуправильные многогранники [Электронный ресурс] / А.Б. Шишова // Концепт. – 2015. – Т. 25. – С. 191–195. – Режим доступа: <http://ekoncept.ru/2015/65341.htm>