Базуева А. В.
Студентка направления подготовки «Математическое образование»
Научный руководитель – к. п. н., ст. преподаватель
С. Р. Мугаллимова

РАВНОСИЛЬНОСТЬ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И СИСТЕМ

Алгебра возникла в связи с решением разнообразных задач при помощи числовых равенств, а именно уравнений. Обычно в задачах требуется найти одну или несколько неизвестных, зная при этом результаты некоторых действий, произведенных над искомыми данными величинами. Такие задачи сводятся к решению одного или систем нескольких уравнений, к нахождению искомых с помощью алгебраических действий над данными величинами. В алгебре изучаются общие свойства над величинами. Некоторые решения линейных и квадратных уравнений методом равносильных преобразований были известны ещё 4000 лет назад в Древнем Вавилоне [3].

В истории арифметики и алгебры большое значение имеют труды Мухаммеда ал-Хорезми. Написанный им в начале IX в. алгебраический трактат, известный под названием «Китаб ал-джебр ва-л-мукабала» (Книга об алджебр и алмукабале), явился первым в мире самостоятельным сочинением по алгебре. Для ал-Хорезми алгебра – это искусство решения уравнений, необходимое людям – как писал он – «в случаях наследования, наследственных пошлин, раздела имущества, торговли и во всех их деловых взаимоотношениях, или же в случае измерения земель, проведения каналов, геометрических вычислений и других предметов различного рода…» [3, с.162].

Знак равенства используется в математике давно. Ещё в 1557 г., когда Роберт Рекорд впервые ввел знак равенства, он мотивировал своё нововведение следующим образом: никакие два предмета не могут быть между собой более равными, чем два параллельных отрезка. Знак равенства Рекорда стал, однако, общеупотребительным лишь в XVIII в., после того как им стали пользоваться Лейбниц и его последователи [3, с. 164].

Исходя из знака равенства Рекорда, другой английский ученый Гарриот ввел употребленного поныне знака неравенства, обосновывая (в практике аналитического искусства», вышедшей в 1631 г. посмертно) нововведение (до него писали словами: «больше», «меньше») следующим образом: если две величины не равны, то отрезки, фигурирующие в знаке равенства, уже не параллельны, а пересекаются. Пересечение может иметь место справа (>), или слева (<). В первом случае образованный знак неравенства будет обозначать «больше», во втором – «меньше». Несмотря на то, что знаки неравенства были предложены через 74 года, после предложенного Рекордом знака равенства, они вошли в употребление намного раньше последнего. Одна из причин этого явления корениться в том, что в типографии не было знака равенства (=), а изготовить его было нелегко [3, с. 164].

Формулы решения квадратных уравнений по образцу ал-Хорезми в Европе были впервые изложены в «Книге абака», написанной в 1202 г. итальянским математиком Леонадро Фибоначчи. Этот объемистый труд, в котором отражено влияние, как математики стран ислама, так и древней Греции, отличается и полнотой и ясностью изложения. Вывод формулы решения квадратного уравнения в общем виде имеется у Виета, однако Виет признавал только положительные корни. Итальянские математики Тарталья, Кардано, Бомбелли среди первых в XVI в. учитывают, помимо положительных, и отрицательные корни [3, с. 155].

Процесс освобождения алгебры от геометрической формы и создание буквенной символики начался ещё в древней Греции (Диофант) и был продолжен в Индии и в среднем веке в Европе. Однако лишь после того как Виет ввел буквенное обозначение не только для неизвестных, но и для известных величин, после появления трудов Декарта, Ньютона и других ученых, этот исторический процесс был в основном завершен [3].

Понятие «равносильности» мы можем увидеть в теме неопределенных алфавитов. Работа имеет дело с недоопределёнными данными — последовательностями недоопределённых символов. Каждому недоопределённому символу соответствует некоторое множество основных (полностью определённых) символов, любым из которых он может быть замещен (доопределён). При оперировании с недоопределёнными данными часто бывает достаточно вместо самих данных иметь их доопределения. Такие более слабые требования к данным предоставляют дополнительные возможности, одной из которых является рассматриваемая в работе возможность нетривиальных равносильных преобразований недоопределённых алфавитов. Обсуждаются вопросы, каким образом можно сравнивать недоопределённые алфавиты и заключать, что один из них сильнее другого либо что они равносильны [4].

В курсе лекции В. Г. Болтянского понятию «равносильности» дается определение, а также представлены теоремы, обосновывающие принципы равносильности, и их доказательство.

Определение 1. Два уравнения называются равносильными, если множества их решений совпадают. Это можно сформулировать более подробно: два уравнения равносильны, если каждое решение первого является решением второго и, обратно, каждое решение второго уравнение является решением первого; другими словами, если уравнения являются следствиями друг друга [1, с. 37].

Например, уравнение $x - 1 = 0$ равносильно уравнению $\sqrt{x^2 - x + 1} = 2x + 1$; уравнение $x^2 + 2xy + y^2 = 0$ равносильно уравнению $x + y = 0$.

Вместо данного уравнения можно решать уравнение, ему равносильное. Замена одного уравнения другим, ему равносильным, множество решений которого по каким-то причинам найти легче, является основным приемом при решении уравнений.

Пусть имеется уравнение

$$f_1(x) = f_2(x) \qquad (1)$$

и g – функция, которую можно применить к обеим частям уравнения

$$g(f_1(x)) = g\ (f_2(x)) \qquad (2)$$

является следствие уравнения (1):

$$f_1(x) = f_2(x) => g\ (f_1(x)) = g\ (f_2(x)). \qquad (3)$$

Для того, чтобы уравнения (1) и (2) были равносильными, нужно, чтобы каждый корень уравнения (2) был корнем уравнения (1), иначе говоря, чтобы был возможен переход

$$g\ (f_1(x)) = g\ (f_2(x))\ =>\ f_1(x) = f_2(x). \qquad (4)$$

Легко сообразить, что подобный переход возможен, если функция g переводит всякое неверное равенство в верное.

Контрпример, пусть $f_1(x) = x^2 - 1$, $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$. Тогда уравнение $f_2(x) = 0$ не имеет корней, уравнение $f_1(x) = 0$ имеет два корня $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, а уравнение $f_1(x)\ f_2(x) = 0$ имеет только один корень $x_1 = -1$, так как при $x = 1$ левая часть этого уравнения не определена[2, с. 287].

Теорема 1. Если все функции $f_1(x)$, $f_2\ (x)$,…, $f_n(x)$ определены на множестве М (т.е. если множество М содержится в области определения каждой из функций $f_1(x)$, $f_2\ (x)$,…, $f_n(x)$), то на этом множестве уравнение

$$f_1(x), f_2\ (x), \ldots, f_n(x) = 0 \qquad (5)$$

равносильно дизъюнкции уравнений

$$f_1(x) = 0, \qquad f_2\ (x)=0, \ldots,\ f_n(x)=0 \text{ [2, с.286].} \qquad (6)$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in M$, и пусть $x = x_0$ – корень одного из уравнений (6). Не теряя общности, будем считать, что $x = x_0$ — корень уравнения $f_1(x) = 0$. Тогда функция $f_1(x)$ определена при $x = x_0$ и $f_1(x) = 0$. Так как $x_0 \in M$, то функция $f_2\ (x)=0, \ldots,\ f_n(x)$ также определены при $x = x_0$ и

$$f_1(x_0)\ f_2\ (x_0), \ldots, f_n(x_0) = 0$$

(первый множитель в левой части равен нулю).

Итак, любой (содержащийся в множестве M) корень каждого из уравнений

$$f_1(x) = 0, \qquad f_2\,(x)=0, \ldots, f_n(x)=0$$

является корнем уравнения (5).

Обратно, пусть $x = a$ — корень уравнения (5), что $a \in M.$ Тогда все функции $f_2\,(x)=0, \ldots, f_n(x)$ определены при $x = a$ и

$$f_1(a)\, f_2\,(a), \ldots, f_n(a) = 0.$$

Из этого следует, что равно нулю хотя бы одно из чисел

$$f_1(a), \qquad f_2\,(a), \ldots, f_n(a).$$

А это означает, что $x = a$ является корнем уравнения, по крайней мере одного из уравнений

$$f_1(x) = 0, \qquad f_2\,(x)=0, \ldots, f_n(x)=0.$$

Доказанная теорема лежит в основе часто применяемого метода разложений уравнений на множители [2, с.286].

Пример, легко проверить, что $x^6 + 3x^5 - x^4 - 3x^3 = x^3(x^2 - 1)(x + 3)$, поэтому уравнение $x^6 + 3x^5 - x^4 - 3x^3 = 0$ равносильно дизъюнкции уравнений

$$x^3 = 0, \qquad x^2 - 1 = 0, \qquad x + 3 = 0$$

и имеют следующие корни: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = -3$ [2, с.287].

Литература

1. Башмаков, М. И. Уравнения и неравенства [Текст] : учеб. пособие / М. И. Башмаков, [выпуск 5]. – М. : Наука, 1971. – 99 с.
2. Болтянский, В. Г. Лекции и задачи по элементарной математике [Текст] : учеб. пособие / В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин. – М. : Наука, 1974. – 592 с.
3. Глейзер, Г. И. История математики в школе [Текст] : пособие для учителей / Г. И. Глейзер – М. : Просвещение, 1964. – 375 с.
4. Шоломов, Л. А. О понятии равносильности недоопределенных алфавитов [Текст] / Л. А. Шоломов // Прикладная дискретная математика. – 2014. - № 3. – С. 40 -57.