Математическое моделирование для проектирования оптимальных сетей городских и межрегиональных инфраструктур

Зяблицев Алексей Михайлович
Руководитель: Мандражи Оксана Анатольевна
Харьковский национальный аграрный университет им. В.В. Докучаева

Проблемы поиска оптимальных решений математических задач имеют важное прикладное значение для полноценного развития научно-технического потенциала и пребывают в центре внимания нескольких наук: математики, физики, экономики, информатики и других. Одним из перспективных направлений развития прикладной математики на современном этапе является решение задачи Штейнера, которая в настоящее время представляет значительный научный и практический интерес в связи с широкими исследованиями и практическим использованием при разработке инфраструктурных (транспортных, электрических, компьютерных и т.п.) сетей. Вышеизложенное и определило научно-практическое направление исследования, в котором выстраиваются графики зависимостей самого короткого пути для прямоугольника, параллелограмма и трапеции, и результаты которого будут представлены в данной статье.

Цель исследования заключалась в разработке методов решения задач по нахождению минимального пути с помощью сетей Штейнера для четырёхугольников, в выявлении закономерностей построения сетей Штейнера в случаях с четырёхугольниками, а также в применении полученных результатов при планировании и строительстве инфраструктуры городов.

Сеть Штейнера была нами определена как наиболее энергоэффективный способ соединения отдельных узлов в области её существования. При этом энергоэффективность рассматривается в широком смысле – это и минимальный расход энергии, ресурсов, и наименьшее расстояние и т.п. С геометрической точки зрения сетью Штейнера называют минимальную сеть отрезков прямых линий, которые соединяют произвольное множество точек. Все данные точки называют настоящими, другие – дополнительными. Самая короткая система отрезков должна иметь следующие свойства [1]:

1. Каждая сеть Штейнера состоит из отрезков, которые объединяются в плоский граф. Концы этих отрезков – вершины графа, а сами отрезки – его рёбра. Минимальный связный граф существует тогда, когда не содержит замкнутых путей. Если бы минимальная система отрезков не была

односвязной, то существовал бы замкнутый путь. Удалив любое из рёбер этого пути, мы получили бы связный граф меньшей длины.

2. Произвольные два ребра, выходящие из общей вершины, образуют угол не меньше 120°.

3. Из настоящей вершины не может выходить больше трёх рёбер, иначе один из углов будет меньше 120°.

4. Из каждой дополнительной вершины выходят три ребра под углами 120°.

Для сетей Штейнера существует следующая лемма: каждая сеть Штейнера имеет или тупиковую вершину, или тупиковую пару вершин.

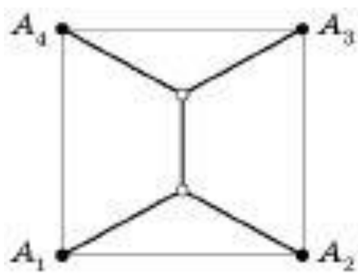
Современная вычислительная техника даёт возможность производить анализ огромного количества вариантов и легко выстраивать сети Штейнера, например, для двадцати точек. Системы дорог на местности с однородным рельефом (например, в степи) уже сейчас строятся на основе сетей Штейнера. Поэтому и появилось желание дополнить исследования рассмотрением случаев четырёхугольников, а именно прямоугольника, параллелограмма и трапеции.

Задача Штейнера принадлежит к классу задач, решение которых является неочевидным и даже неожиданным. Тем более удивляет, когда мы встречаем её примеры в живой природе. Наиболее впечатляющим примером сетей Штейнера в природе есть обычные пчелиные соты.

История задачи Штейнера восходит к временам Пьера Ферма, который впервые сформулировал её, но решения не нашел [2]. Эта задача была частично решена Е. Торричелли. Он ввел такое понятие, как точка Торричелли – это точка в плоскости треугольника, сумма расстояний от которой до вершин треугольника имеет наименьшее значение.

С 1835 г. Якоб Штейнер начал преподавать в Берлинском университете математику. Своим студентам он давал такое задание [3]:

- *Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 4 км. Жители хотят соединить их системой дорог так, чтобы из каждого села можно было проехать в любое другое. Они собрали деньги на 11 км дороги. Хватит ли им этого?*



Несмотря на то, что формулировка данной задачи очень простая, её решение трудно поддаётся анализу. Задачу Штейнера невозможно решить, просто рисуя линии между заданными точками. Для решения необходимо добавлять новые точки, которые называют точками Штейнера, это служебные точки, используемые в качестве узлов искомой кратчайшей сети. Штейнер сформулировал несколько свойств и изобрёл способ решения этой задачи.

Придерживаясь исторической хронологии, стоит отметить, что Е. Торричелли и Б. Кавальери предложили достаточно простой и красивый геометрический метод построения кратчайшего пути для треугольника. Несколько позднее З. Мельзак взял его за основу построения сети для произвольного множества точек.

Рассмотрим этот метод и его следствия. Возьмём две точки A и B. На их основе построим равносторонний треугольник ΔABM и опишем окружность вокруг него. Если из точки M провести луч, пересекающий отрезок AB, а, соответственно, и дугу $\overset{\frown}{AB}$, опирающуюся на хорду AB, то дуга $\overset{\frown}{AB}$ и будет представлять собой геометрическое место точек Штейнера относительно точек A и B (рис.1).

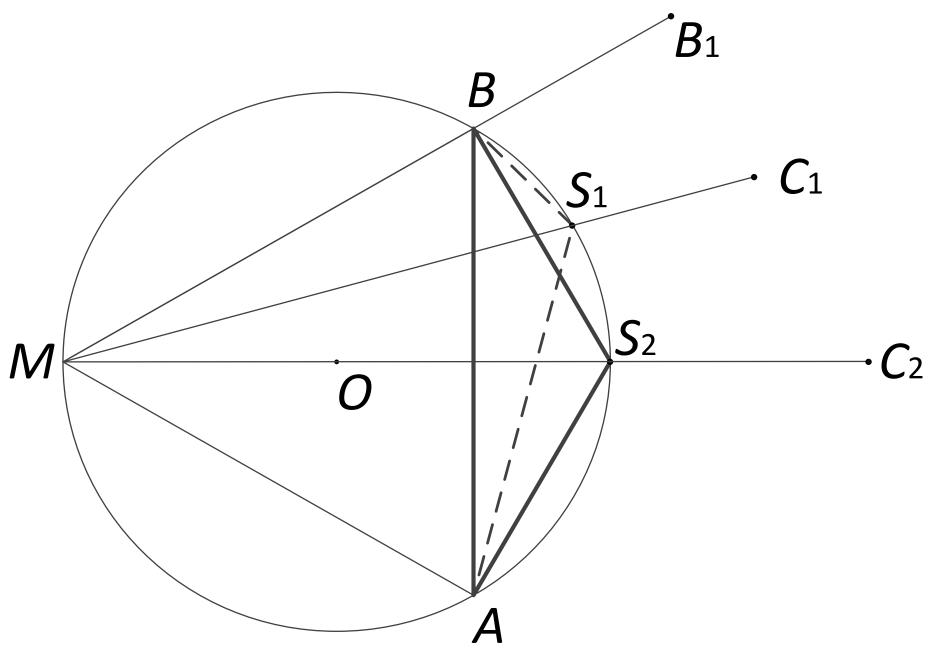


Рис.1 Метод построения точек Штейнера для точек A и B.

То есть, точка S_1 является точкой Штейнера треугольника ΔABC_1, точка S_2 – треугольника ΔABC_2.

Это довольно легко показать следующим образом. Все углы, опирающиеся на одну хорду, равны друг другу. То есть $\angle MBA = \angle MS_1A = \angle MS_2A = 60°$. Точно так же $\angle MAB = \angle MS_1B = \angle MS_2B = 60°$.

Из этого получаем

$$\angle AS_1B = \angle AS_1M + \angle MS_1B = 120°$$

$$\angle AS_2B = \angle AS_2M + \angle MS_2B = 120°.$$

Для пересекающихся прямых выполняется равенство

$$\angle MS_1A + \angle AS_1C_1 = 180°.$$

Из этого имеем $\angle AS_1C_1 = 120°$, аналогично $\angle BS_1C_1 = 120°$.

То есть, для любой точки C, которая лежит в плоскости угла $\angle AMB$, и точки S, которая является точкой пересечения отрезка MC и дуги $\overset{\frown}{AB}$, является правильным:

$$\angle ASC = \angle BSC = \angle ASB = 120°.$$

Такие точки S называют *точками Торричелли (Штейнера)*.

Также было доказано ещё одно интересное свойство. Сумма хорд вписанного угла, который опирается на точки A и B, равна хорде, проходящей через вершину этого угла и противоположную вершину треугольника ΔABM, то есть

$$AS_1 + S_1B = S_1M$$
$$AS_2 + S_2B = S_2M.$$

Рассмотрим угол $\angle ABB_1$, где т.B_1 принадлежит прямой MB. Таким образом, угол $\angle ABB_1 = 120°$. В этом случае точка S совпадает с точкой B, то есть кратчайшей сетью будут непосредственно отрезки AB и BB_1.

Если угол больше 120°, то точки Штейнера также совпадают с точкой B (рис. 2).

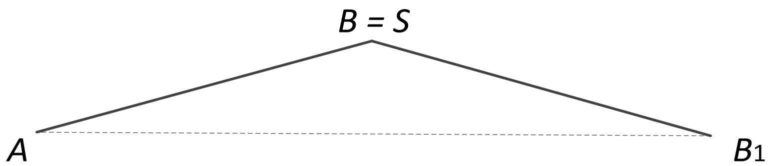


Рис.2 Точка Штейнера при угле в 120° или большем

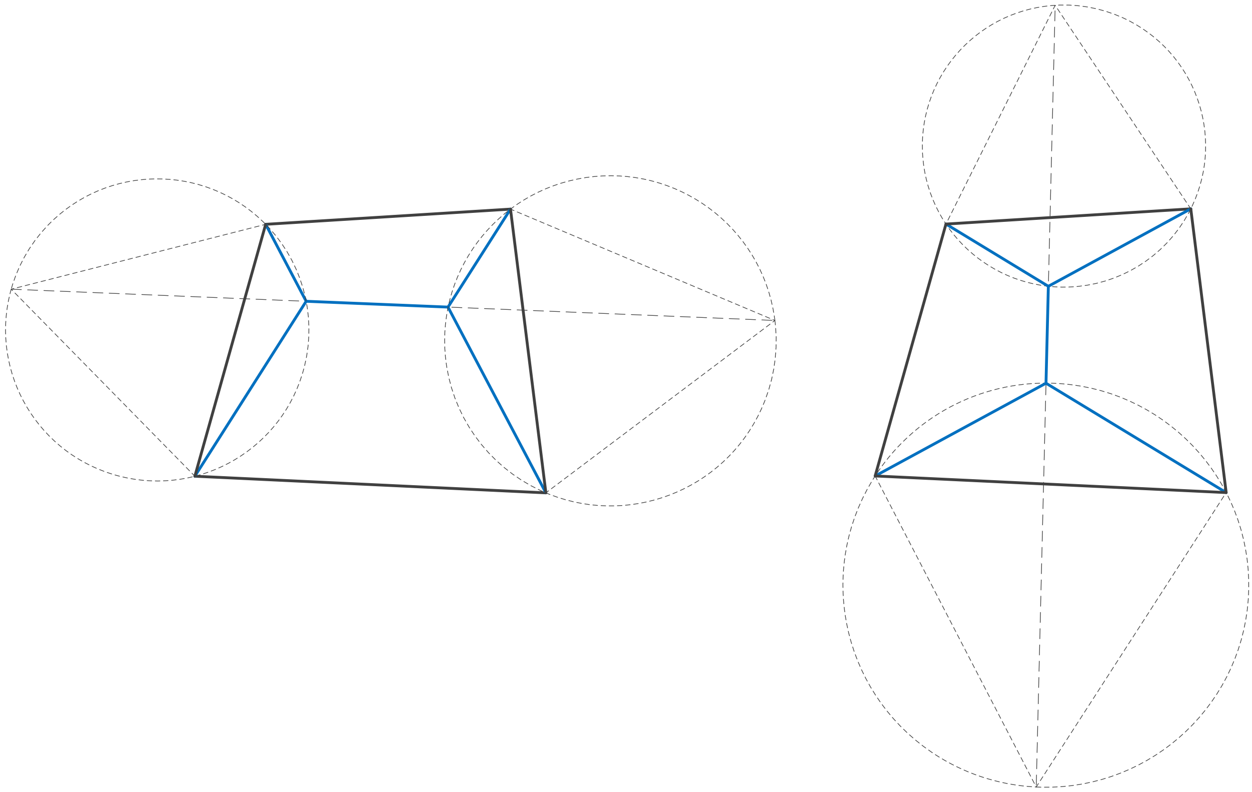
Таким образом, в нашем исследовании мы можем опираться на следующие свойства:

- для любого треугольника с углами меньшими 120° существует единая сеть Штейнера с одной вспомогательной точкой и тремя рёбрами, расположенными под углами в 120°;
- если в треугольнике угол больше или равен 120°, то кратчайшей сетью будут две стороны треугольника, образующие этот угол.

Опираясь на приведённые факты, З. Мельзак предложил метод построения, при котором точки A и B заменяются точкой M и дугой $\overset{\frown}{AB}$. Данный способ наилучшим образом подходит для построения сетей Штейнера для четырехугольников.

Для четырехугольника существует две сети Штейнера, построенные на противоположных сторонах.

Рассмотрим способ её построения (рис. 3). На противоположных сторонах четырехугольника достраиваем равносторонние треугольники и соединяем их противоположные вершины отрезком. Вокруг каждого из треугольников описываем окружности. Эти окружности пересекают данный отрезок в точках, называемых точками Торричелли. Получившийся отрезок между двумя точками Торричелли и является одним из рёбер нужного нам



графа. Далее, для получения кратчайшего графа, соединяем каждую вершину четырехугольника с близлежащей точкой Торричелли. В результате получаем желаемую сеть Штейнера для четырехугольника. Она состоит из пяти рёбер и имеет две дополнительные вершины.

Далее рассмотрим сети Штейнера для прямоугольника, параллелограмма и трапеции.

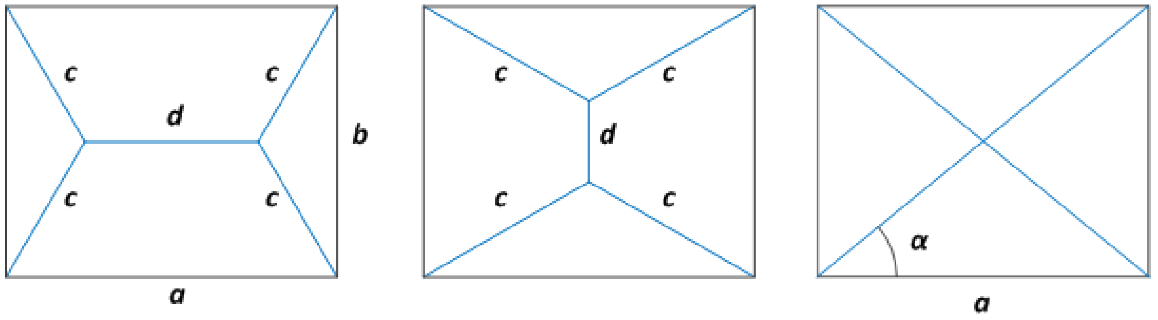
Разные случаи параллелограмма.

Прямоугольник.

Рассмотрим задачу Штейнера для прямоугольника [4, с.85]. Как было отмечено выше, есть два варианта построения сети Штейнера. Обозначим их соответственно *S1* и *S2* (рис. 4 а) и б).

Рис.3 Две возможные сети Штейнера для четырехугольника

Для сравнения проанализируем эти два случая, а также вариант диагоналей.



а) сеть S1

б) сеть S2

в) параметрическое представление прямоугольника

Рис.4 Два способа построения сети Штейнера для прямоугольника.

Зададим прямоугольник в параметрическом виде – с нижней стороной a и углом между ней и диагональю α (рис. 4 в).

Также введём следующие обозначения:

b – боковая сторона прямоугольника;

c – ребро между точкой Торричелли и вершиной прямоугольника;

d – ребро между двумя точками Торричелли.

Длина боковой стороны b равна

$$b = a\,\mathrm{tg}\,\alpha$$

Рассмотрим первый случай.

Для треугольника ΔAMM_1 (рис. 5) справедливо

$$\mathrm{c} = \frac{\mathrm{b}}{2\cos 30°} = \frac{\mathrm{a\ tg\alpha}}{\sqrt{3}};$$

$$MM_1 = \frac{c}{2};$$

$$d = AD - 2\,MM_1 = a - c$$

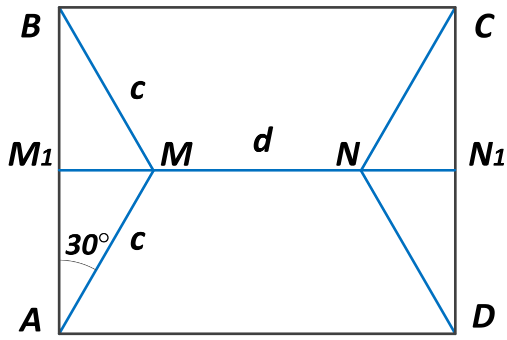


Рис.5 Сеть S1

Тогда имеем следующую длину сети $S1$

$$S1 = 4c + d = a + 3c = a + 3\frac{a\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{3}} = a\left(1 + \sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\alpha\right)$$

Следует отметить, что эта формула справедлива при $0° \le \alpha \le 60°$.

Если $\alpha = 60°$, то точки M и N совпадают и является точкой пересечения диагоналей (это является следствием свойства неравенства треугольника).

Если $\alpha > 60°$, то отрезки AM и DN пересекаются под углом 60°, что противоречит одному из требований построения сети Штейнера.

Аналогично выразим длину сети $S2$

$$c = \frac{a}{2\cos 30°} = \frac{a}{\sqrt{3}};$$
$$d = b - c;$$
$$S2 = 4c + d = b + 3c = a \operatorname{tg} \alpha + 3\frac{a}{\sqrt{3}} = a\left(\operatorname{tg} \alpha + \sqrt{3}\right)$$

Сеть *S2* существует при 30° ≤ α ≤ 90°.

Следовательно, поскольку области существования сетей *S1* и *S2* перекрываются, делаем первый вывод:

- *для прямоугольника сеть Штейнера существует всегда, при любом соотношении сторон.*

Несложно предположить, что длина сетей *S1* и *S2* совпадает для квадрата. Проверим это, приравняв их длины между собой. В этом случае получим α = 45°.

$$S1 = a\left(1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} 45\right) = a\left(1 + \sqrt{3}\right)$$
$$S2 = a\left(\operatorname{tg} 45 + \sqrt{3}\right) = a\left(1 + \sqrt{3}\right)$$

Сопоставив между собой равенства для сетей *S1* и *S2* для других значений угла α, видим, что

$S1 < S2$ при $\alpha < 45^0$, то есть при $a > b$,

$S1 > S2$ при $\alpha > 45^0$, то есть при $a < b$.

Таким образом, можно сделать следующий вывод:

- *более эффективная такая сеть, где вспомогательные точки (точки Торричелли) построены на коротких сторонах прямоугольника.*

Сравним длину сети Штейнера с ещё двумя сетями – диагоналями и каркасным деревом, то есть тремя рёбрами прямоугольника.

В случае с диагоналями длина сети *L* равна

$$L = \frac{2a}{\cos \alpha}.$$

Для каркасного дерева длина *P* равна

$$P1 = a + 2b = a(1 + 2\operatorname{tg} \alpha), \qquad \text{при } 0° < \alpha \leq 45°$$
$$P2 = 2a + b = a(2 + \operatorname{tg} \alpha), \qquad \text{при } 45° \leq \alpha < 90°$$

или

$$P = \min(a(1 + 2\operatorname{tg} \alpha), a(2 + \operatorname{tg} \alpha))$$

Построим эти графики, приравняв $a = 1$ (рис. 6).

Рассмотрев этот график, видим, что когда прямоугольник по пропорциям ближе к квадрату, то каркасное дерево проигрывает диагоналям, а в случае вытянутого прямоугольника каркасное дерево короче, чем диагонали. *Но в обоих случаях сеть Штейнера короче.*

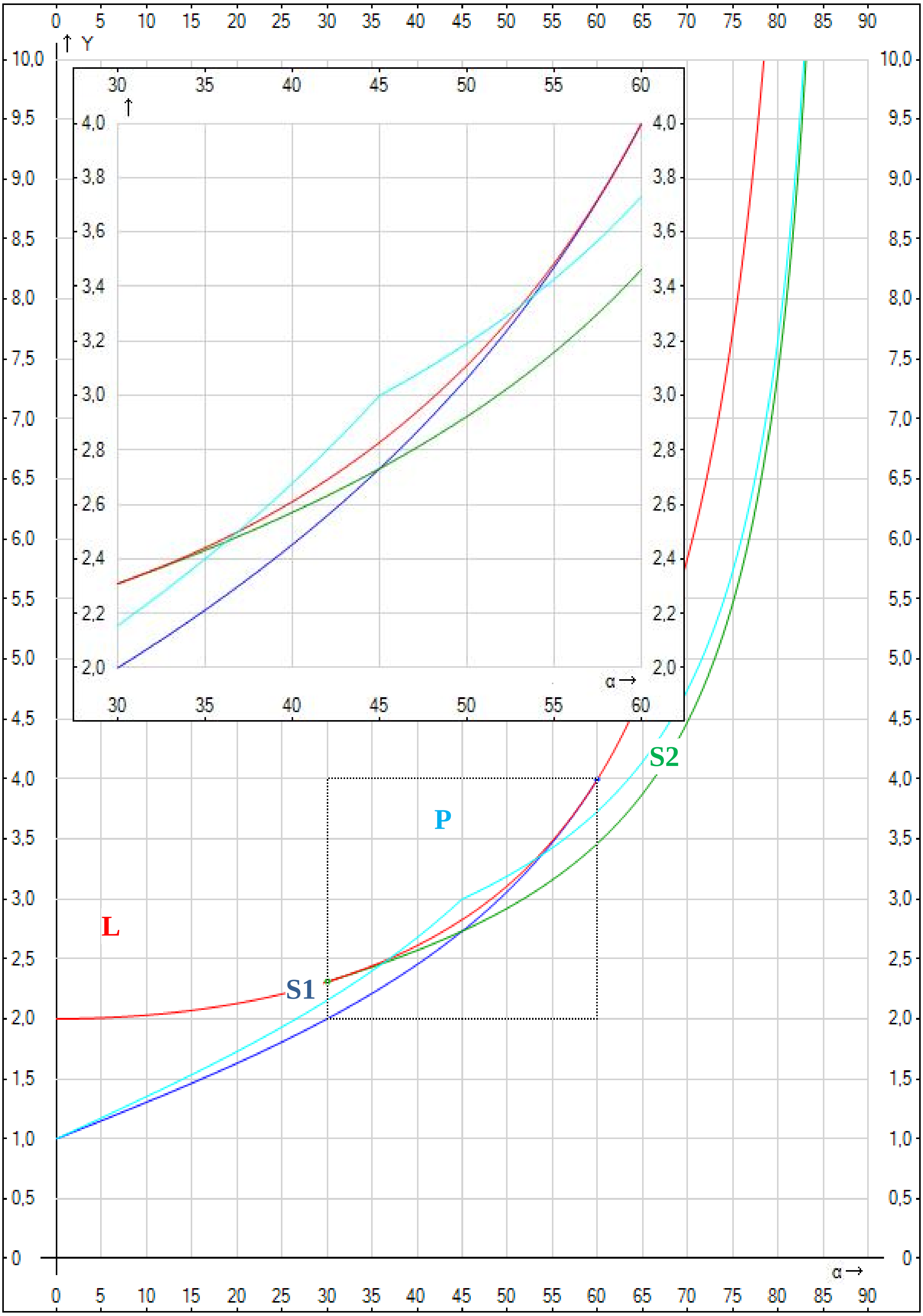


Рис. 6 Зависимость длины сети прямоугольника от угла между нижней стороной и диагональю.

Сравним сеть Штейнера с сетями, состоящими из диагоналей, и с каркасным деревом. Построим графики соотношения длины сети L, которая состоит из диагоналей, к более оптимальной сети Штейнера $S = min(S1,S2)$ (рис. 7, красный график) и длины каркасного дерева P к S (рис. 7, голубой график).

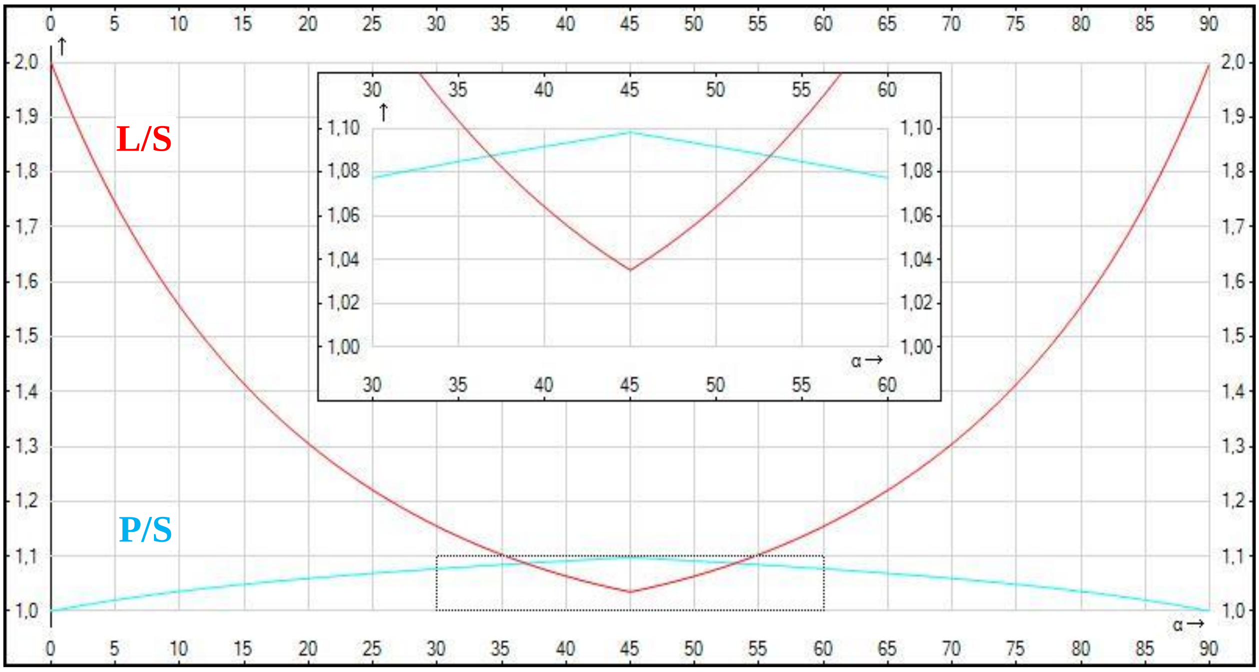


Рис.7 Соотношение длины сетей построенных на диагоналях и каркасном дереве до длины сети Штейнера

Этот график дает нам представление об эффективности сети Штейнера относительно других сетей. Мы видим, что наиболее эффективно это соотношение в точке пересечения данных графиков. Рассмотрим этот случай. Сравним P/S=L/S. Имеем

$$\frac{2a}{\cos\alpha} = a(1 + 2\operatorname{tg}\alpha)$$

Решив уравнение, находим

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$$

То есть, *сеть Штейнера наиболее эффективна для прямоугольника с соотношением сторон 3:4.*

При этом его длина составляет $S = 2{,}299$ (при единичной стороне a), а длина сетей $L = P = 2{,}5$.

Максимальный коэффициент эффективности составляет S/L = 1,087411293.

Другие случаи параллелограмма.

Для параллелограмма, как и для любого другого четырехугольника, возможно существование двух сетей Штейнера. Как было показано для прямоугольника, сеть Штейнера, построенная на более длинных сторонах, существует до тех пор, пока точки Торричелли не сойдутся в одну точку, являющуюся точкой пересечения диагоналей (рис. 8, синяя сеть). Но, в то же время, возможно существование сети, для которой точки Торричелли построены на коротких сторонах.

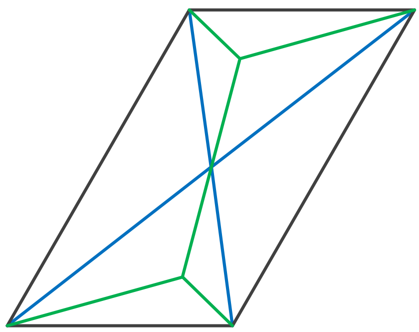


Рис.8 Сети Штейнера для параллелограмма

Судя из этого, для параллелограмма можно по аналогии предположить, что:

- *более эффективная сеть та, где вспомогательные точки (точки Торричелли) построены на коротких сторонах параллелограмма, если такая сеть существует;*
- *сеть Штейнера более эффективна для вытянутых параллелограммов.*

В начале исследования главной целью была разработка методов поиска кратчайшего пути с помощью сетей Штейнера. В ходе исследования стала проблема существования сети Штейнера при условии, что точка Торричелли лежит не в плоскости фигуры. То есть, для параллелограмма интересно исследовать область существования сети Штейнера, построенной на точках Торричелли, а также найти более эффективную сеть в случае отсутствия вышеназванной.

Рассмотрим параллелограмм с углом между сторонами 120° и основой a большей за боковую сторону b (рис. 9).

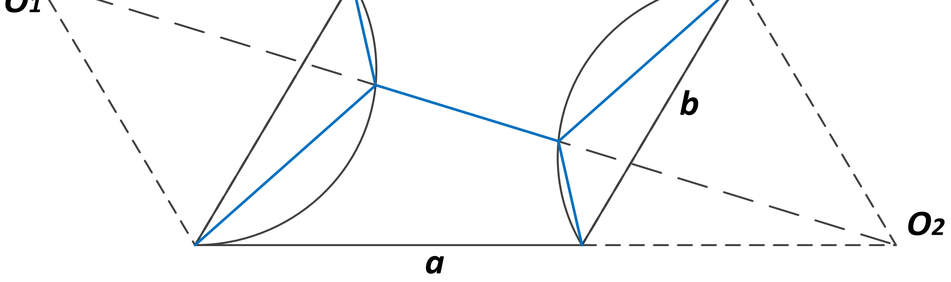


Рис. 9 Сеть Штейнера для параллелограмма с углом 120°

Очевидно, какой бы большой не была основа a (при $a > b$), точки Торричелли будут существовать всегда, поскольку противоположные вершины равносторонних треугольников O_1 и O_2 лежат на параллельных прямых, являющихся продолжениями нижней и верхней сторон параллелограмма.

Рассмотрим случай, когда тупой угол больше 120° (рис. 10).

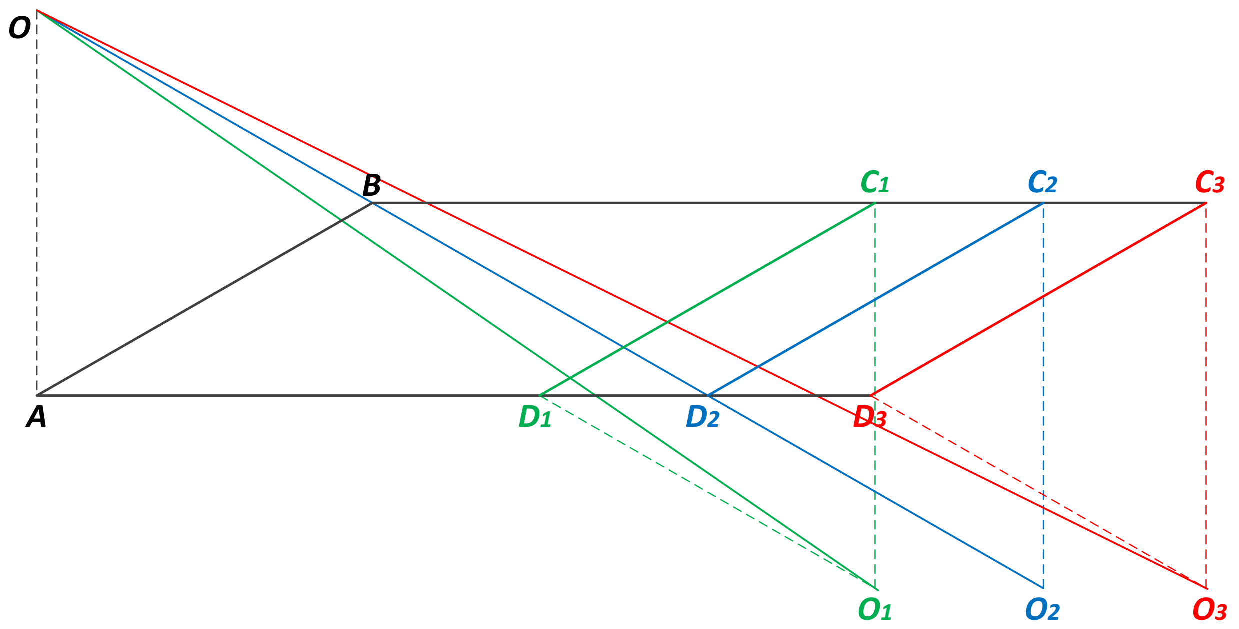


Рис. 10 Различные варианты параллелограммов с углом больше 120 °

Из этого построения видно, что:

- для параллелограмма ABC_1D_1 прямая OO_1 пересекает стороны AB и C_1D_1, то есть для него существуют точки Торричелли;
- для параллелограмма ABC_2D_2 точки B и D_2 принадлежат прямой OO_2 и, как было показано ранее, кратчайшим путём будет AB- BD_2 - D_2C_2;
- для параллелограмма ABC_3D_3 прямая OO_3 не пересекает стороны AB и C_3D_3. В таком случае кратчайшим путём будет AB- BD_3 - D_3C_3.

Таким образом, можно сделать вывод, что *для параллелограмма с углом больше 120° область существования точек Торричелли зависит от соотношения прилегающих сторон параллелограмма.*

Рассмотрим предельный случай 2 с рис. 10, а именно зависимость стороны $AD = a$ от боковой стороны b и угла α (рис. 11).

Пусть угол $\angle B > 120°$. Тогда $\angle A = \alpha < 60°$.

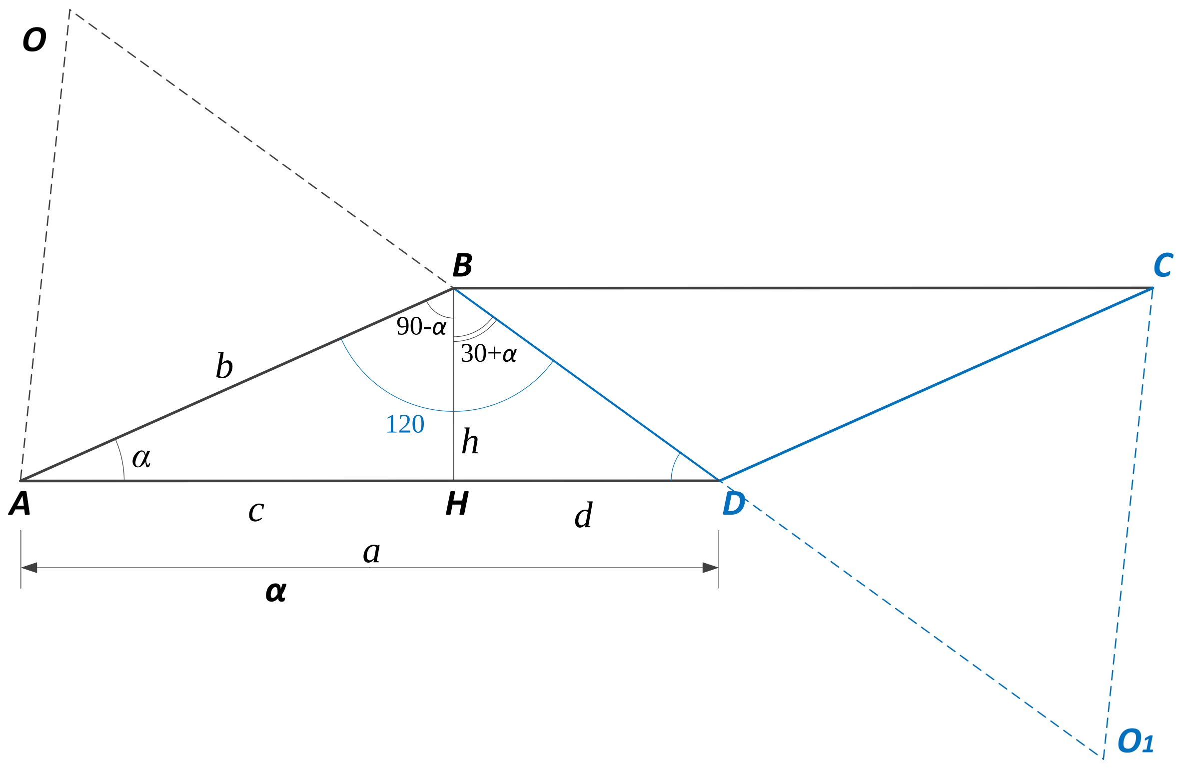


Рис.11 Параллелограмм с углом больше 120°

Опираясь на рис. 11, имеем следующие равенства:

$$c = b\cos\alpha\,;$$

$$h = b\sin\alpha\,;$$

$$d = h\,\mathrm{tg}(30+\alpha) = \ b\sin\alpha\,\mathrm{tg}(30+\alpha)\,;$$

$$a = c + d = b\cos\alpha + \ b\sin\alpha\,\mathrm{tg}(30+\alpha)$$

Построим график, приравняв b=1 (рис. 12). Данный график демонстрирует максимальное значение соотношения сторон a/b в зависимости от угла между ними, при котором для параллелограмма существуют точки Торричелли.

Из этого графика мы видим, что $a/b > 1$ для всех углов $\alpha > 0°$. Если принять $a/b = 1$, то мы получим ромб. Итак, мы пришли к выводу, что для ромба всегда существуют точки Торричелли.

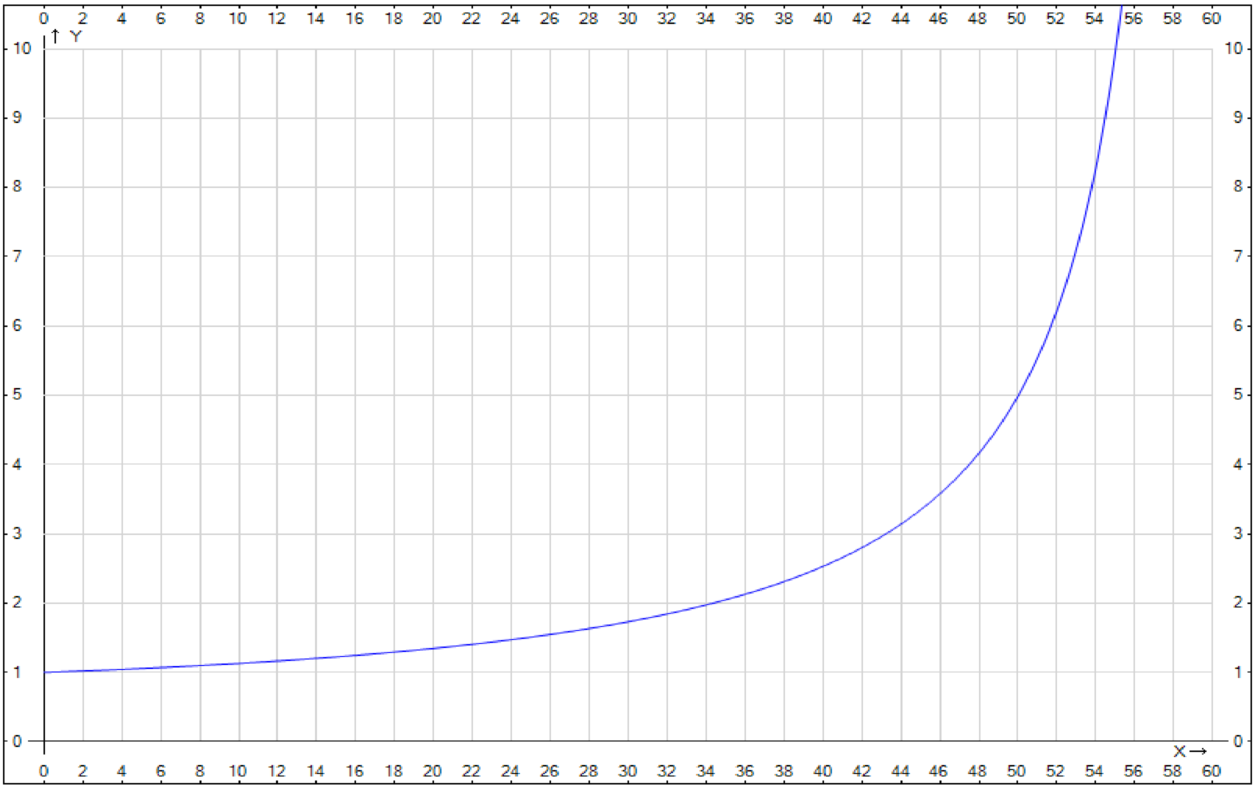


Рис.12 График области существования точек Торричелли для параллелограмма в зависимости от угла.

Равнобедренная трапеция.

Рассмотрим несколько случаев равнобедренной трапеции. Для начала возьмём «высокую» трапецию, у которой высота больше основания, то есть $h > a$ (рис. 13).

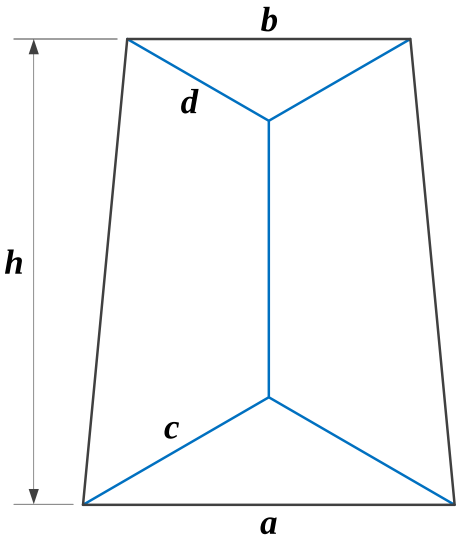


Рис.13 «Высокая» равносторонняя трапеция

Для нее длина сети Штейнера S равна

$$S = 2c + 2d + \left(h - \frac{c+d}{2}\right) = \frac{3}{2}(c + d) + h;$$

$$c = \frac{a}{\sqrt{3}}; d = \frac{b}{\sqrt{3}};$$

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b) + h$$

Теперь рассмотрим «широкую» равнобедренную трапецию, у которой верхнее основанее больше боковой стороны и угол при основании равен 60° (рис. 14 а).

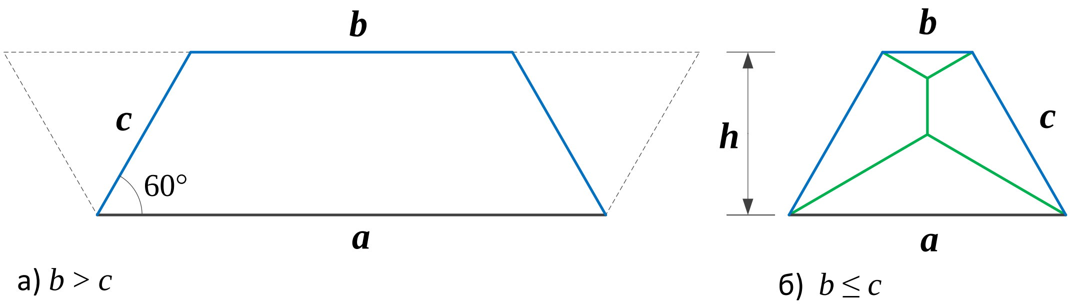


Рис.14 «Широкая» равносторонняя трапеция

В этом случае, а также когда угол будет меньше 60°, кратчайший путь L является каркасным деревом и состоит из боковых и верхнего рёбер. Его длина равна

$$L = 2c + b$$

Когда угол при основании равен 60° для равнобедренной трапеции спрведливы следующие соотношения:

$$a = b + c; \;\; h = \frac{c}{\sqrt{3}};$$

Попробуем теперь «сужать» трапецию и найти соотношение, при котором длина сети Штейнера S будет равняться пути L.

$$S = \frac{\sqrt{3}}{2}(a + b) + h = \sqrt{3}(c + b)$$

$$L = 2c + b$$

Сравним $S = L$, имеем

$$\sqrt{3}c + \sqrt{3}b = 2c + b$$

$$b = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}c = 0{,}3660254\,c$$

$$S = L = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}\,c = 2{,}366\,c$$

Также можно заметить, что областью существования сети Штейнера с точками Торричелли для равнобедренной трапеции является трапеция с углом при основании от 60° до 90°.

Подводя итоги, отметим, что в исследовании было:

1. Дано определение понятия сети Штейнера: сеть Штейнера можно определить как наиболее энергоэффективный способ соединения отдельных узлов в области её существования. При этом энергоэффективность в

широком смысле – это и минимальные расходы энергии, ресурсов, и наименьшие расстояния и т.п.

2. Систематизированы и обобщены сведения про понятие «точка Торричелли», так как со времён Ферма точка Торричелли определяется только как точка треугольника. В соответствии с теорией Штейнера возможно построение точки Торричелли для четырёхугольников.

3. Для прямоугольника были проведены расчёты и построена зависимость длины сети от сторон и угла с диагональю.

4. Учитывая вышеизложенное, установлено:

- для прямоугольника сеть Штейнера существует всегда;
- выявлено, что более эффективной сетью является та, где дополнительные точки (точки Торричелли) построены на меньших сторонах прямоугольника;
- выяснено, что сеть Штейнера является наиболее эффективной для прямоугольников с соотношением сторон 3:4. При этом коэффициент эффективности в сравнении с каркасной сетью или сетью, построенной из диагоналей, равен 1,087411.

Относительно параллелограмма и трапеции, то для упомянутых фигур была определена область существования сети Штейнера, а также доказано правильность утверждения, что более эффективная та сеть, где дополнительные точки построены на меньших сторонах.

В процессе научного поиска возник вопрос относительно области существования сети Штейнера для параллелограмма и равнобедренной трапеции. Для параллелограмма представлен график области существования сети Штейнера. Также во время рассмотрения области существования сети для параллелограмма мы пришли к выводу – для ромба сеть Штейнера существует всегда.

Для равнобедренной трапеции был рассмотрен граничный случай существования сети Штейнера, а именно – равнобедренная трапеция с углом 60°, у которой верхнее основание больше боковой стороны.

Несмотря на то, что в работе были рассмотрены отдельные классы четырёхугольников, полученные результаты могут быть использованы в задачах с большим количеством точек, например, как весомые коэффициенты при выборе последовательности построения сети.

Список использованной литературы

1. Иванов А. О. Задача Штейнера на плоскости или плоские минимальные сети / А. О. Иванов, А. А. Тужилин // Матем. сб. — М. : МГУ, 1991. — Т. 182. — № 12. — С. 1813–1844.

2. https://uk.wikipedia.org/wiki/Задача_Штейнера

3. Курант Р. / Р. Курант, Г. Роббинс / Что такое математика?— 3-е изд., испр. и доп.—М.:МЦНМО, 2001. — 568с.

4. Збірник матеріалів щодо організації науково-дослідницької діяльності учнів у системі Малої академії наук України. Наукове відділення математики / [відп. за випуск Луніна В.]. – Харків, 2014. – 98 с.