Применение дифференциальных уравнений в биологии и химии

Гажова Екатерина, студентка второго курса СОФ НИУ «БелГУ»,
научный руководитель – Примак И.М., ст. преподаватель

Многие задачи химии, биологии, медицины, техники, механики и других наук естествознания сводятся к математическому моделированию процессов в виде формулы, т.е. в виде функциональной зависимости. Так, например, результат химических реакций, вычисление мажоритарной выручки фирмы, динамика силы тока с течением времени, демографическая обстановка в определенном регионе исследуются с помощью дифференциальных уравнений. Именно это и стало толчком для выбора данной темы. Для ее раскрытия были взяты за основу теория дифференциальных уравнений и некоторые задачи естествознания, которые решаются с помощью дифференциальных уравнений.

Объектом исследования являются обыкновенные дифференциальные уравнения.

Предметом исследования является определение первоначального количества вещества.

Целью работы является рассмотреть применение дифференциальных уравнений для решения задач по дисциплинам естественно научного цикла.

Данная цель определяет ряд *задач*:

1. Рассмотреть теоретические основы обыкновенных дифференциальных уравнений;

2. Решить задачу по химии с помощью обыкновенного дифференциального уравнения.

Методологической основой данного исследования являются научные труды следующих ученых И. А. Зайцева, Н. Я. Виленкина, И. И. Баврина, Н. Л. Глинки, Ю. А. Владимирова.

1. Теоретическое обоснование

Для данного исследования было применено обыкновенное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, имеющее вид [2]

$$\frac{dy}{dx} f(y) + g(x) = 0,$$

которое решается следующим образом:

$$f(y)dy = -g(x)dx,$$
$$\int f(y)dy = -\int g(x)dx,$$
$$F(y) + C_1 = G(x) + C_2,$$
$$F(y) = G(x) + C.$$

2. Практическое применение

Рассмотрим пример решения задачи по химии с помощью дифференциального уравнения.

Задача. Вещество А превращается в вещество В. Определить первоначальное количество вещества А и время, когда останется половина этого вещества, если спустя 1 час после начала реакции осталось 24,4 г вещества А, а после 4 часов - 3,05 г.

Решение. Здесь имеет место реакция первого порядка, $n = 1$. Обозначим через a - первоначальное количество вещества А, через x - количество вещества, прореагировавшего за время t от начала реакции, k - коэффициент пропорциональности, называемый *константой скорости реакции,* тогда дифференциальное уравнение имеет вид:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = k(a - x).$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделяя в уравнении переменные и, затем, интегрируя, получаем:

$$\frac{\Delta x}{(a - x)} = k\Delta t,$$
$$\int \frac{\Delta x}{(a - x)} = \int k\Delta t,$$

$$-\ln(a-x)+\ln C=kt.$$

Откуда по свойству логарифмов получим уравнение

$$\ln\frac{C}{a-x}=kt.$$

В полученное равенство подставим начальные условия, имеем при *t=0, x=0*: *C = a*.

Подставим значение *C* в уравнение, получим:

$$\ln\frac{a}{a-x}=kt,$$

$$\frac{a}{a-x}=e^{kt},$$

$$a-x=ae^{-kt},$$

сделав преобразования, увидим, что количество вещества, прореагировавшего за время *t,* можно вычислить по формуле:

$$x=a(1-e^{-kt}).$$

Используя дополнительные условия (при *t = 1 x = a - 24,4,* при *t = 4 x = a - 3,05)*, получим и решим систему:

$$\begin{cases} a-24{,}4=a(1-e^{-k}), \\ a-3{,}05=a(1-e^{-4k}), \end{cases}$$

$$\begin{cases} 24{,}4=ae^{-k}, \\ 3{,}05=ae^{-4k}. \end{cases}$$

$$8=\frac{ae^{-k}}{ae^{-4k}},$$

$$8=e^{3k},$$

$$e^{-k}=\frac{1}{2},$$

Таким образом, первоначальное количество вещества А

$$a=48{,}8\ \text{г}.$$

Найдём время распада половины этого вещества. Подставив, значение *a* в формулу количества вещества, получим:

$$\frac{a}{2} = a(1 - 2^{-t}),$$
$$\frac{1}{2} = 2^{-t},$$
$$t = 1.$$

Ответ. Первоначальное количество вещества А равно 48,8 г, время, когда останется половина этого вещества - 1 час.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Практическая ценность метода математического моделирования заключается в следующем:

- правильно составленная и всесторонне использованная математическая модель позволяет оптимизировать изучение реальной системы по времени;
- математическая модель позволяет облегчить прогнозирование хода и результатов экспериментов, проводимых в реальных системах.

В представленной работе было рассмотрено применение дифференциальных уравнений для решения задач естественнонаучного цикла, в ходе которого были рассмотрены теоретические основы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными. Математический аппарат решения дифференциальных уравнений позволяет на практике решать задачи естественнонаучного цикла.

Список используемой литературы

1. Баврин И. И. Высшая математика Учебное пособие для студентов хим.- биол. фак. пед. ин-тов М., Просвещение, 2006, 240 с.
2. Виленкин Н. Я. и др. Дифференциальные уравнения Учебное пособие для студентов физ.-мат. фак. М., Просвещение, 2008, 176 с.