ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В МЕЛКОСЛОИСТОЙ СРЕДЕ

Одним из важнейших направлений неразрушающего контроля качества материалов, деталей, изделий и конструкций является структуроскопия, заключающаяся в контроле физико-механических свойств исследуемых материалов. Контроль физико-механических характеристик акустическими методами контроля основан на аналитических связях измеренных акустических параметров с оцениваемыми свойствами материала. При четкой аналитической связи контролируемое свойство может быть определено с высокой точностью. Так, все три упругих постоянных материала (модуль Юнга, модуль сдвига, коэффициент Пуассона) однозначно определяются по измеренным значениям скоростей распространения продольной и поперечной волн. Мелкослоистые среды, изготовление которых не сложно, а свойства могут быть очень разнообразны (анизотропия скоростей распространения и поглощений как для волн сжатия, так и для волн сдвига), представляют практический интерес в акустике (проблемы виброизоляции, ультраакустика) и в сейсмологии.

Целью статьи и является определение скорости продольной волны в мелкослоистой среде через решение, дисперсионного уравнения, относительно волнового числа, которое выведено с некоторыми поправочными членами, которые ранее не учитывались. Графическая зависимость получаемая в этом случае достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными.

В отношении своих упругих свойств мелкослоистая среда является кристаллом гексагональной симметрии, то есть для описания её упругого поведения необходимо и достаточно задать 5 упругих постоянных [1].

К нахождению упругих модулей мелкослоистой среды можно подойти различно. Один из способов заключается в предположении периодичности повторения слоёв. Задача о распространении волн приводится тогда к решению волнового уравнения с периодическими коэффициентами. Так как внутри слоёв параметры постоянны и меняются скачком только на границах между слоями, решение может быть найдено в общем случае не тонких слоёв [2].

При распространении акустической волны в твёрдой мелкослоистой среде кроме трёх аналогичных поперечных волн (волн сдвига) имеются еще две продольных волны (волны сжатия). Тем не менее, если ограничится распространением волн только в направлениях, перпендикулярном и параллельном слоям, причем в последнем случае – при двух поляризациях, то можно определить лишь четыре из пяти упругих постоянных.

Пусть свойства мелкослоистой среды являются периодическими функциями z с периодом h, малым по сравнению с длиной волны, то есть [1]:

$$\rho(z+h)=\rho(z),\ \lambda(z+h)=\lambda(z),\ \mu(z+h)=\mu(z).$$

Рассмотрим распространение продольной волны в мелкослоистой среде типа «сталь-графит» параллельно слоям в направлении оси x (рис.1). Общая толщина среды принималась равной 1 мм. Частота ультразвука – 1 МГц.

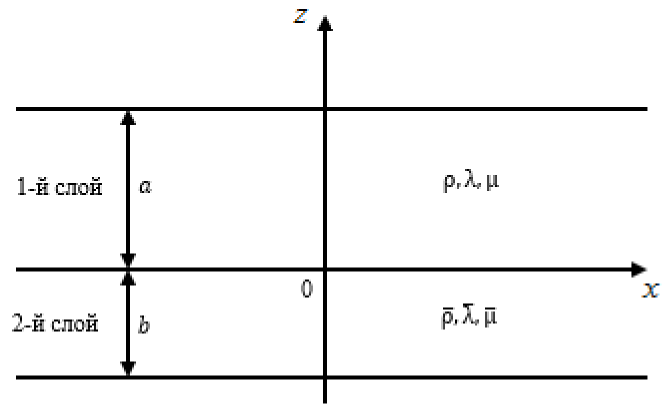

Рис. 1

Общее решение для продольной и поперечных волн запишем через специально выбранные частные решения, а именно – чётное и нечётное относительно середин слоёв. Для первого слоя имеем:

$$\xi_{lx} = P(z)e^{-ikx}, \xi_{lz} = \frac{P'(z)}{ik}e^{-ikx}, \xi_{tx} = -\frac{Q'(z)}{ik}e^{-ikx}, \xi_{tz} = Q(z)e^{-ikx}, \quad (1)$$

где ξ_{lx}, ξ_{lz} - продольные смещения, а ξ_{tx}, ξ_{tz} - поперечные смещения. Причём

$$\begin{gathered} P(z) = A\cos\alpha\left(z-\frac{a}{2}\right) + B\sin\alpha\left(z-\frac{a}{2}\right),\ \alpha^2 = k_l^2 - k^2, \\ Q(z) = C\cos\beta\left(z-\frac{a}{2}\right) + D\sin\beta\left(z-\frac{a}{2}\right),\ \beta^2 = k_t^2 - k^2, \end{gathered} \quad (2)$$

где *A, B, C, D* – пока неопределенные постоянные, k_l, k_t - волновые числа продольной и поперечной волны соответственно.

Как видно, в последних двух выражениях выделена симметричная и антисимметричная части относительно середины слоя. В слое два уравнения (1) будут аналогичными, но с чертой сверху. Уравнения (2) во второй среде будут иметь вид:

$$\begin{gathered} \overline{P(z)} = \bar{A}\cos\bar{\alpha}\left(z+\frac{b}{2}\right) + \bar{B}\sin\bar{\alpha}\left(z+\frac{b}{2}\right),\ \bar{\alpha}^2 = \bar{k}_l^2 - k^2, \\ \overline{Q(z)} = \bar{C}\cos\bar{\beta}\left(z+\frac{b}{2}\right) + \bar{D}\sin\bar{\beta}\left(z+\frac{b}{2}\right),\ \bar{\beta}^2 = \bar{k}_t^2 - k^2, \end{gathered} \quad (3)$$

Для мелкослоистой среды в указанном направлении распространения волны компоненты тензора механических напряжений определяются через следующие выражения:

$$\sigma_{xz} = 2\mu\left(P'(z) + \frac{k^2-\beta^2}{2ik}Q(z)\right)e^{-ikx},\ \sigma_{yz} = 0,\ \sigma_{zz} = \left(\frac{\lambda k_l^2 + 2\mu\alpha^2}{ik}P(z) + 2\mu Q'(z)\right)e^{-ikx}. \quad (4)$$

Аналогичным образом выражаются компоненты тензора механических напряжений во втором слое.

На границе между слоями должны выполняться для $\xi_{lx}, \xi_{lz}, \xi_{tx}, \xi_{tz}, \sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz}$ должны выполняться, во-первых, условия непрерывности [2]:

$$
\begin{aligned}
&\xi_x(0)=\overline{\xi_x(0)},\ \sigma_{xz}(0)=\overline{\sigma_{xz}(0)},\\
&\xi_z(0)=\overline{\xi_z(0)},\ \sigma_{zz}(0)=\overline{\sigma_{zz}(0)},
\end{aligned} \tag{5}
$$

и, во-вторых, условия периодичности:

$$
\begin{aligned}
&\xi_x(a)=\overline{\xi_x(-b)},\ \sigma_{xz}(a)=\overline{\sigma_{xz}(-b)},\\
&\xi_z(a)=\overline{\xi_z(-b)},\ \sigma_{zz}(a)=\overline{\sigma_{zz}(-b)}.
\end{aligned} \tag{6}
$$

Подставляя соответствующие выражения в граничные условия получаем 8 уравнений для постоянных $A, B, C, D, \overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D},$ которые распадаются на две независимые группы: для продольной и поперечной волны.

Для продольной волны коэффициенты $B=C=\overline{B}=\overline{C}=0$. В этом случае продольные смещения чётны (симметричны) относительно середин слоёв, в то время как поперечные нечётны (антисимметричны), благодаря чему «в среднем», то есть в случае достаточно тонких слоёв, имеет место только сжатие, а сдвиг отсутствует. Тогда подставляя уравнения (1), (4) с учётом выражений (2), (3) в граничные условия (5) получим четыре уравнения для определения постоянных $A, D, \overline{A}, \overline{D}$. Составим детерминант из этих четырех уравнений и приравняем его к нулю:

$$
\begin{vmatrix}
ik\cos\alpha\left(\frac{a}{2}\right) & -\beta\cos\beta\left(\frac{a}{2}\right) & ik\cos\overline{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right) & -\overline{\beta}\cos\overline{\beta}\left(\frac{b}{2}\right)\\
\alpha\sin\alpha\left(\frac{a}{2}\right) & -ik\sin\beta\left(\frac{a}{2}\right) & -\overline{\alpha}\sin\overline{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right) & ik\sin\overline{\beta}\left(\frac{b}{2}\right)\\
2\mu\alpha ik\sin\alpha\left(\frac{a}{2}\right) & \mu\left(k^2-\beta^2\right)\sin\beta\left(\frac{a}{2}\right) & -2\overline{\mu}\overline{\alpha}ik\sin\overline{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right) & \overline{\mu}\left(\overline{k}^2-\overline{\beta}^2\right)\sin\overline{\beta}\left(\frac{b}{2}\right)\\
\left(\lambda k_l^2+2\mu\alpha^2\right)\cos\alpha\left(\frac{a}{2}\right) & 2\mu\beta ik\cos\beta\left(\frac{a}{2}\right) & \left(\overline{\lambda}\overline{k}_l^2+2\overline{\mu}\overline{\alpha}^2\right)\cos\overline{\alpha}\left(\frac{b}{2}\right) & 2\overline{\mu}\overline{\beta}ik\cos\overline{\beta}\left(\frac{b}{2}\right)
\end{vmatrix}=0
$$

Вычисляя данный определитель с учётом граничных условий (6) разложением по первой строке, получим дисперсионное уравнение, определяющее значение волнового числа k, то есть значение скорости распространения волны сжатия $c_l = \omega/k$:

$$
\begin{aligned}
&4\left(\mu-\overline{\mu}\right)^2 X\overline{X}+\omega^2\rho\left[\frac{\omega^2\rho}{k^2}-4\left(\mu-\overline{\mu}\right)\right]\overline{X}\cdot tg\left(\frac{\beta a}{2}\right)+\omega^2\overline{\rho}\left[\frac{\omega^2\overline{\rho}}{k^2}+4\left(\mu-\overline{\mu}\right)\right]X\times\\
&\times tg\left(\frac{\overline{\beta}b}{2}\right)-\frac{\omega^4\rho\overline{\rho}}{k^2\overline{k}_l^2}\left[Y\cdot tg\left(\frac{\overline{\beta}b}{2}\right)+\overline{Y}\cdot tg\left(\frac{\beta a}{2}\right)\right]=0,
\end{aligned} \tag{7}
$$

где введены следующие обозначения

$$
X=k^2tg\left(\frac{\beta a}{2}\right)+\alpha\beta tg\left(\frac{\alpha a}{2}\right),\ \overline{X}=k^2tg\left(\frac{\overline{\beta}b}{2}\right)+\overline{\alpha}\overline{\beta}tg\left(\frac{\overline{\alpha}b}{2}\right),
$$

$$
Y=k^2tg\left(\frac{\beta a}{2}\right)-\overline{\alpha}\beta tg\left(\frac{\overline{\alpha}b}{2}\right),\ \overline{Y}=k^2tg\left(\frac{\overline{\beta}b}{2}\right)-\alpha\overline{\beta}tg\left(\frac{\alpha a}{2}\right).
$$

Уравнение (7) определяет k при любых значениях толщин слоёв a и b в рассматриваемой периодической структуре. Решив дисперсионное уравнение относительно k с учётом соответствующих параметров сред 1 и 2, построим графическую зависимость эффективной скорости продольной волны от относительной толщины слоёв n (рис.2).

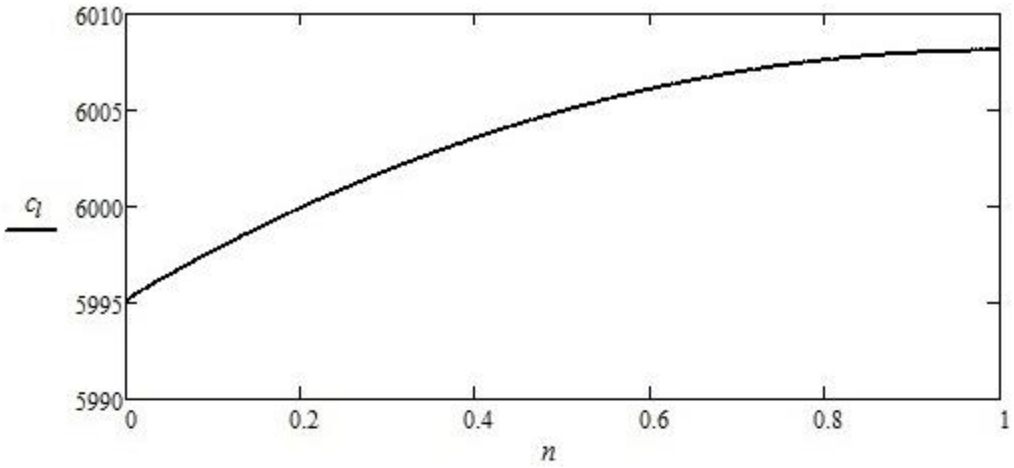

Рис. 2

Приведенная зависимость достаточно хорошо согласуется с экспериментальными данными. Переход к мелкослоистой среде соответствует замене всех тангенсов их аргументами. Это приводит к существенному упрощению дисперсионного уравнения и даёт следующее выражение для квадрата скорости волны сжатия:

$$c_{lm}^2 = \frac{h\left(\dfrac{a}{\lambda+2\mu}+\dfrac{b}{\bar{\lambda}+2\bar{\mu}}\right)^{-1}}{\rho} \cdot \left[1+\left(\frac{4ab}{h^2}\right)(\mu-\bar{\mu})(\mu+\lambda-\bar{\mu}-\bar{\lambda})(\lambda+2\mu)^{-1}(\bar{\lambda}+2\bar{\mu})^{-1}\right],$$

где $h = a + b,\ \rho = \dfrac{a\rho + b\bar{\rho}}{h}$.

Представим графическую зависимость эффективной скорости продольной волны для мелкослоистой среды от относительной толщины слоёв *n* (рис.3).

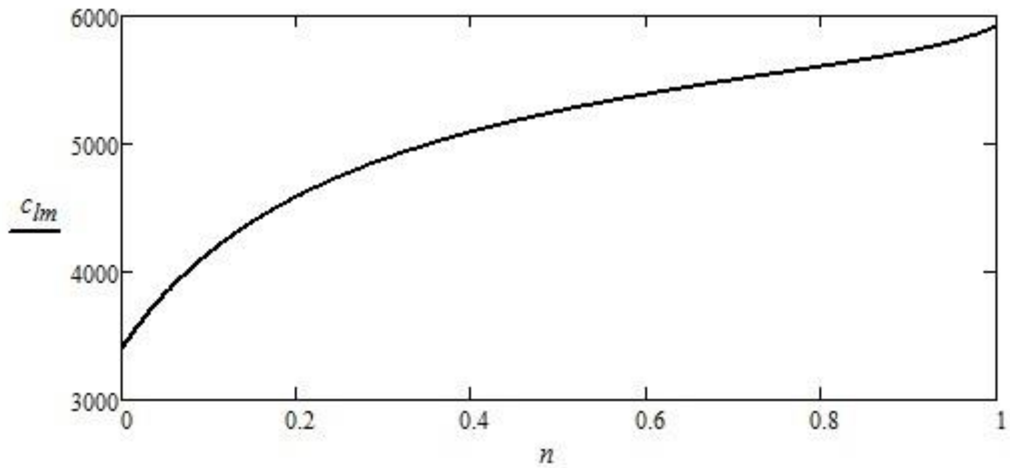

Рис. 3

Как известно, в монографии «Волны в слоистых средах» Л.М. Бреховских дисперсионное уравнение имеет следующий вид, отличный от уравнения (7):

$$4\left(\mu-\bar{\mu}\right)^2 X\bar{X}+\omega^2\rho\left[\frac{\omega^2\rho}{k^2}-4\left(\mu-\bar{\mu}\right)\right]\bar{X}\cdot tg\left(\frac{\beta a}{2}\right)+\omega^2\bar{\rho}\left[\frac{\omega^2\bar{\rho}}{k^2}+4\left(\mu-\bar{\mu}\right)\right]X\times$$
$$\times tg\left(\frac{\bar{\beta}b}{2}\right)-\frac{\omega^4\rho\bar{\rho}}{k^2}\left[Y\cdot tg\left(\frac{\bar{\beta}b}{2}\right)+\bar{Y}\cdot tg\left(\frac{\beta a}{2}\right)\right]=0. \tag{8}$$

Решая данное уравнение относительно k с учётом соответствующих параметров сред 1 и 2, в качестве которых рассматриваем сталь-графит, построим графическую зависимость эффективной скорости продольной волны от относительной толщины слоёв n (рис.4).

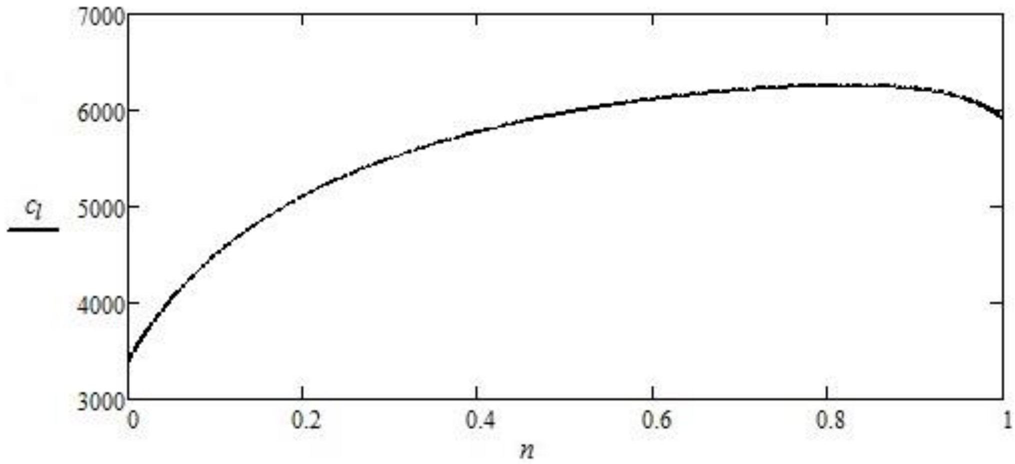

Рис.4

Как видно, приведённая зависимость отличается от зависимости, представленной на рисунке 2. Данное различие обусловлено тем, что выражение (7) приведено с некоторыми поправками, которые не учитываются в дисперсионном уравнении (8). В работах [3], [4] дисперсионное уравнение (8) приведено также с ошибкой, что даёт не верные графические зависимости эффективной скорости от относительной толщины слоёв.

Так как внутри слоёв параметры постоянны и меняются скачком только на границах между слоями, решение может быть найдено в общем случае не тонких слоёв. В результате предельного перехода из выражения (7) вытекает решение для мелкослоистой среды, причем учёт поправочных членов позволяет уточнить условия применимости указанных предельных результатов.